

Beloftencompetitie

Februari 2006

1. In een rechthoekige driehoek ABC met rechte hoek C beschouwt men op de schuine zijde de punten D en E waarvoor geldt dat $|AC| = |AD|$ en $|BC| = |BE|$. Bepaal de grootte van de hoek $\angle DCE$.
2. $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ zijn onvereenvoudigbare breuken waarvoor

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$$

Toon aan dat $b = d$.

3. Beschouw 16 willekeurige getallen van elk 3 cijfers lang en allen samen opgebouwd uit slechts 3 verschillende cijfers. Bewijs dat steeds 2 van de 16 getallen dezelfde rest geven bij deling door 16.
4. Een 7×7 -rooster wordt volledig bedekt door 16 rechthoeken van 1×3 en één vierkantje van 1×1 . Vind alle mogelijk posities van het vierkantje.
5. Vind alle natuurlijke getallen n waarvoor

$$\left\lfloor \frac{n+2^0}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2^1}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^{2005}}{2^{2006}} \right\rfloor = n$$

Hierbij betekent $\lfloor x \rfloor$ het grootste natuurlijk getal dat kleiner dan of gelijk aan x is.