Beloftencompetitie: oplossingen
Januari 2006

1. *De eerste vraag was er een met weinig valkuilen. Bijna alle deelnemers behaalden dan ook de maximale score.*

   Ja, zo'n getal bestaat. We geven een concreet voorbeeld.

   2006 heeft als som van de cijfers 8. $2 \cdot 2006 = 4012$ heeft als som van de cijfers 7. Bekijk nu het getal
   $$n = 20062006 \cdots 200640124012$$
   dat ontstaat door achter elkaar 249 keer het getal 2006 en 2 keer het getal 4012 op te schrijven. Aangezien $2006 = 249 \cdot 8 + 2 \cdot 7$, is de som van de cijfers van n gelijk aan 2006. En omdat n de som is van veelvouden van 2006, is n ook deelbaar door 2006. n voldoet dus aan de gestelde voorwaarden.

   Met dezelfde techniek kan je natuurlijk nog een hele hoop andere voorbeelden construeren.

2. *De heksenvraag was een probleem met veel subtiliteiten. Veel deelnemers hadden moeite om een rigoureus bewijs op te schrijven, enkel Gert-Jan Dugardein gaf een mooi en volledig antwoord. Een fout die door velen gemaakt werd, is het terugvallen op begrippen als 'optimale verdeling van de heksen'. Dit zijn hele vage begrippen die je beter niet gebruikt.*

   Noem het middelpunt van de cirkel O. Bekijk een bepaalde heks, die we voorstellen als het punt H. Kies een boog $\widehat{AB}$, die 120° groot is, zodat H niet op de boog ligt. De middelpuntshoek $\angle AOC$ is 120° groot, dus de omtrekshoek $\angle AHB$ is 60° groot, onafhankelijk van waar de heks H zit. De heks H kan dus door in de juiste richting te kijkgen, elke willeurige boog van 120° die haar niet bevat overzien.

   Verdeel de cirkel in drie bogen van 120°, die samen de volledige cirkel vormen. Kies deze bogen bovendien zo, zodat niet alle heksen op dezelfde boog zitten. (Je kan steeds de grenzen tussen de bogen verschuiven, zodat er een grens ligt tussen twee willekeurige heksen, en deze heksen dus op verschillende bogen zitten.)

   Als elk van de drie bogen ten hoogste 4 heksen bevat, kunnen er maar 12 heksen zijn. Er moet dus een boog van 120° zijn waarop minstens 5 heksen zitten. (Dit is het zogenaamde duivenhokprincipe.) Er is echter ook een heks, die buiten deze boog zit, want niet alle heksen zitten op dezelfde boog. Deze heks kan door in de goede richting te kijken de hele boog van 120° overzien, en dus minstens 5 heksen tegelijk zien.

3. *Bij de derde vraag was het vooral een kwestie van een goede telmethode te vinden en het rekenwerk nauwkeurig te voeren.*

   We moeten nagaan hoeveel verschillende waarden $\{f(0), f(1), f(2), \cdots, f(2006)\}$ bevat. Al deze waarden zijn in principe onafhankelijk van elkaar, de enige beperking is dat $f(n+1)$ gelijk moet zijn aan zijn voorganger $f(n)$ indien n een veelvoud is van 2, 3, of 5. Als we de functiewaarden $f(n)$ in volgorde van $f(0)$ tot $f(2006)$ kiezen, kunnen we telkens een nieuwe waarde nemen als $n-1$ geen veelvoud is van 2, 3 of 5. In het andere geval moeten we echter onze vorige waarde behouden.

   We tellen daarom het aantal getallen dat niet deelbaar is door van 2, 3 of 5. Van 0 tot 30 zijn dit 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 en 29, acht waarden dus. Omdat 30 een veelvoud is van zowel 2, 3 als 5, herhaalt dit patroon zich elke 30 getallen. Van 0 tot $2010 = 67 \cdot 30$ zijn dit dus $67 \cdot 8 = 536$ getallen n, waarvoor we de functiewaarde $f(n+1)$ vrij kunnen kiezen. $f(2010)$ valt daarbij buiten ons bereik, maar $f(0)$ moeten we nog extra meetellen, zodat het totaal aantal *vrije* functiewaarden 536 blijft.

4. *De vierde vraag was een ongelijkheid die met basistechnieken op te lossen was. Wel moest je ervoor opletten dat de ongelijkheid strikt is, en dus was het aan te tonen dat gelijkheid zich nooit kon voordoen.*

Er geldt dat $(a-1)^2 \geq 0$, met gelijkheid als en slechts als $a = 1$. Hieruit volgt dat $a^2+1 \geq 2a$, een aangezien beide leden positief zijn ook dat

$$\frac{1}{a^2+1} \leq \frac{1}{2a}$$

met gelijkheid als en slechts als $a = 1$.

Door dezelfde redenering te voeren voor b en c, krijgen we dat

$$\begin{aligned} abc\left(\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\right) &\leq abc\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c}\right) \\ &= abc\left(\frac{ab+bc+ca}{2abc}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

met gelijkheid als en slechts als $a = b = c = 1$. Als $a = b = c = 1$ geldt echter $ab+bc+ca = 3$, wat niet aan de gestelde voorwaarde voldoet. De gelijkheid is dus strikt, wat het bewijs voltooit.

5. *De laatste vraag was een moeilijke meetkundevraag. Hoewel er geen moeilijke stellingen nodig zijn, combineert het bewijs een heel aantal essentiële inzichten met elkaar.*

Noem het middelpunt van de ingeschreven cirkel O. We hebben dat $\angle OEA = 90° = \angle OFC$, want een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de middellijn door dat punt. De driehoeken OEA en CFO zijn bijgevolg rechthoekig. Hieruit volgt dat

$$\angle EOA = 90° - \angle EAO$$

Het middelpunt van een ingeschreven cirkel ligt op dezelfde afstand van alle zijden, en bijgevolg op alle binnenbissectrices van de vierhoek. Bijgevolg is AO de bissectrice van $\angle BAD$ en is

$$\angle EAO = \frac{1}{2}\angle BAD$$

Analoog is

$$\frac{1}{2}\angle BCD = OCF$$

$ABCD$ is een vierhoek die ingeschreven is in een cirkel (een zogenaamde *koordenvierhoek*). Daarbij geldt dat overstaande hoeken supplementair zijn. Er geldt dus dat

$$\angle BAD = 180° - \angle BCD$$

Door al deze resultaten te combineren, bekomen we dat

$$\begin{aligned} \angle EOA &= 90° - \angle EAO \\ &= 90° - \frac{1}{2}\angle BAD \\ &= 90° - \frac{1}{2}(180° - \angle BCD) \\ &= \frac{1}{2}\angle BCD \\ &= OCF \end{aligned}$$

Bijgevolg zijn de driehoeken OEA en CFO gelijkvormig, en geldt er

$$\frac{|OE|}{|EA|} = \frac{|CF|}{|FO|}$$

en aangezien de straal van de cirkel $r = |OE| = |FO|$, geldt

$$|EA||CF| = r^2$$

Door in plaats van met de driehoeken OEA en CFO, te werken met de driehoeken OEB en DFO, verkrijgen we op analoge wijze dat.

$$|EB||DF| = r^2$$

Hieruit volgt dat

$$|AE||FC| = |EB||DF|$$

en dus

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|DF|}{|FC|}$$

wat te bewijzen was.