Beloftencompetitie
Oplossingen november 2006

1. *Voor $n = 2006$ moest je een goed tegenvoorbeeld geven. Voor $n = 2007$ was het enige moeilijke om nauwkeurig te bewijzen dat de som van de overeenkomste cijfers in de twee getallen steeds 9 moet zijn. In de modeloplossing hieronder gebeurt dit vrij precies met volledige inductie, maar een goed gemotiveerde intuïtievere verklaring was ook goed genoeg.*

   Als $n = 2006$, nemen we $a = 4545 \cdots 4545$ (2006 cijfers) en $b = 5454 \cdots 5454$ (2006 cijfers). Dan bestaan a en b inderdaad uit dezelfde cijfers, en is

   $$a + b = 9999 \cdots 9999 \text{ (2006 cijfers) } = 10^{2006} - 1$$

   Het gevraagde is dus mogelijk.

   Neem nu $n = 2007$, en stel uit het ongerijmde dat er a, b bestaan zoals gevraagd, dus zodat

   $$a + b = 9999 \cdot 9999 \text{ (2007 cijers)}$$

   Noteer met a_i en b_i het cijfer van de 10^i-tallen van respectievelijk a en b. We bewijzen dat $a_i + b_i = 9$ voor alle $i = 0 \cdots 2006$ met volledige inductie.

   - Omdat $0 \leq a_0 + b_0 \leq 18$ en het eenhedencijfer van $a_0 + b_0$ ook het cijfer van de eenheden van $a + b$ is, moet $a_0 + b_0 = 9$
   - Neem $k < 2007$. Stel dat $a_i + b_i = 9$ voor alle $i < k$. Dan is de som van de laatste k cijfers van a, met de laatste k cijfers van b, gelijk aan $999 \cdots 999$ (k cijfers). Omdat er hier geen 10^k-tal ontstaat, wordt het $k + 1$-laatste cijfer van van $a + b$ volledig bepaald door het eenhedencijfer van $a_k + b_k$. Opnieuw moet dus $a_k + b_k = 9$.

   Er geldt dus inderdaad $a_i + b_i = 9$ voor alle $i = 0 \cdots 2006$. Bijgevolg is

   $$a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + \cdots + a_{2006} + b_{2006} = 9 \cdot 2007$$

   Maar omdat a en b uit dezelfde cijfers bestaan, is het linkerlid even. Dit is in tegenspraak met het oneven rechtlid van de gelijkheid. Als $n = 2007$ is het gevraagde dus niet mogelijk.

2.

   (a) Ontbind n in priemfactoren, dus schrijf

   $$n = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \cdots p_m^{q_m}$$

   met $p_1 < \cdots < p_m$ priemgetallen en $q_1, \cdots, q_m$ natuurlijke getallen verschillend van m. Een deler d van n wordt dan ontbonden van

   $$d = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$$

   met $0 \leq r_i \leq q_i$ voor $i = 1 \cdots m$. Voor r_i zijn er dus $q_i + 1$ mogelijkheden, zodat n in totaal

   $$d(n) = (q_1 + 1)(q_2 + 1) \cdots (q_m + 1)$$

   delers heeft.

   Voor elke $i = 1 \cdots m$ is $q_i + 1$ duidelijk een deler van $d(n)$. Omdat het aantal delers van n, $d(n)$, k-machtig is, geeft $q_i + 1$ dus rest 1 bij deling door k. Bijgevolg is q_i zelf deelbaar door k voor alle i, dus we kunnen schrijven dat $q_i = k \cdot s_i$ voor $i = 1 \cdots m$. Bijgevolg is

   $$n = p_1^{k \cdot s_1} p_2^{k \cdot s_2} \cdots p_m^{k \cdot s_m} = (p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_m^{s_m})^k$$

   dus n is de k-de macht van een natuurlijk getal.

(b) Neem $n = 2^3$, de derde macht van een natuurlijk getal. We bewijzen dan het aantal delers van n niet 3-machtig is. Immers

$$d(2^3) = (3+1) = 4$$

zodat 2 een deler is van $d(2^3)$. 2 geeft echter geen rest 1 bij deling door 3, zodat het aantal delers van n niet 3-machtig is.

3. *Een eenvoudige algemene ontbinding was er niet voor deze vraag. Maar na opsplitsing volgens de rest bij deling door* 3 *van* x *en* y, *kon* a *wel steeds vrij eenvoudig in de gevraagde manier geschreven worden.*

Stel

$$3a = x^2 + 2y^2$$

Als ofwel x, ofwel y deelbaar is door 3, dan moeten ze duidelijk allebei deelbaar zijn door 3. We hebben dus de volgende mogelijkheden voor de rest respectievelijk x en y bij deling door 3:

$$(0,0), (1,1), (2,2), (1,2), (2,1)$$

In de eerste drie gevallen kunnen we schrijven dat $x = 3x' + i$ en $y = 3y' + i$ voor $i = 0, 1$ of 2, en x' en y' natuurlijk getallen. Dan is

$$\begin{aligned} 3a &= (3x'+i)^2 + 2(3y'+i)^2 \\ &= 9x'^2 + 6ix' + 18y'^2 + 12iy' + 3i^2 \\ a &= 3x'^2 + 2ix' + 6y'^2 + 4iy' + i^2 \\ &= (x' + 2y' + i)^2 + 2|x' - y'|^2 \end{aligned}$$

In de andere twee gevallen kunnen we schrijven dat $x = 3x' + i$ en $y = 3y' - i$ voor $i = 1$ of 2, en x' en y' natuurlijk getallen. Dan is

$$\begin{aligned} 3a &= (3x'+i)^2 + 2(3y'-i)^2 \\ &= 9x'^2 + 6ix' + 18y'^2 - 12iy' + 3i^2 \\ a &= 3x'^2 + 2ix' + 6y'^2 - 4iy' + i^2 \\ &= |x' - 2y' + i|^2 + 2(x' + y')^2 \end{aligned}$$

In alle gevallen kunnen we a dus in de gevraagde vorm schrijven.

4. *De vierde vraag was een standaard meetkundevraag, waarbij met gelijkvormigheid een koordenvierhoeken moest gewerkt worden. Toch was dit zeker een mooie uitdaging.*

Veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat B en D beide aan dezelfde kant van de rechte AC liggen, zoals op de onderstaande tekening.

Omtrekshoeken op dezelfde boog van een cirkel zijn gelijk, en overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn supplementair. $ABDC$ en $AFEB$ zijn koordenvierhoeken, dus

$$\angle CAD = \angle CBD = \angle EBF = \angle EAF$$

en

$$\angle DCA = 180° - \angle DBA = \angle FBA = \angle FEA$$

Omdat twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn, zijn de driehoeken ACD en AEF gelijkvormig.

Verder is

$$\angle ACE = \angle ACB = \angle ADB = \angle ADF$$

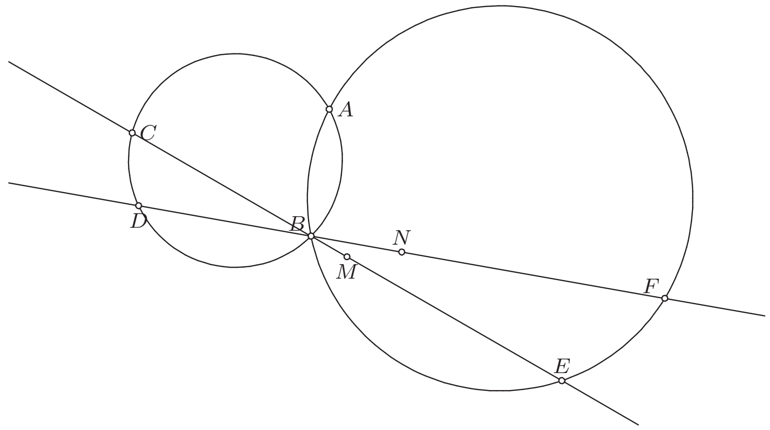
$$\angle AEC = \angle AEB = \angle AFB = \angle AFD$$

dus de driehoeken CAE en DAF zijn gelijkvormig. Omdat N en M de middens zijn van de overeenkomstige zijden CE en DF van deze driehoeken, zijn ook de driehoeken CAM en DAN gelijkvormig. Bijgevolg is $\angle CAM = \angle DAN$ en dus (na verrekening van het deel $\angle DAM$)

$$\angle CAD = \angle MAN$$

Ook zijn de overeenkomstige zijden evenredig, dus CA verhoudt zich tot AD zoals MA zich verhoudt tot AM. Volgens de gelijkvormigheidsregel *ZHZ* zijn de driehoeken CAD en MAN gelijkvormig.

We hebben dus bewezen dat driehoeken ACD, AEF en AMN onderling gelijkvormig zijn, zoals gevraagd was.



5. *Het gebruik van het binair talstelsel is niet essentieel voor de oplossing, maar levert wel het goede perspectief dat de structuur van de rij duidelijk maakt. Onze deelnemers dachten helaas niet aan het binair talstelsel, en hoewel ze wel een min of meer correct beeld vormden van de rij, kwamen ze niet toe aan het bewijzen van de correctheid of de uniciteit van de rij, of aan een correcte berekening van* a_{2006}.

We gebruiken voor deze vraag het binair talstelsel. Vermenigvuldigen met 2 komt dan overeen met een 0 toevoegen op het einde van het getal, en vermenigvuldigen met 4 komt overeen met het toevoegen van twee 0'en.

Voor elk natuurlijk getal i beschouwen we nu de binaire schrijfwijze $\overline{b_m b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_0}$, dus $i = \sum_{k=0}^{m} b_k 2^k$. Defenieer nu

$$a_i = \overline{b_m 00 b_{m-1} 00 \cdots 00 b_2 00 b_1 00 b_0} = \sum_{k=0}^{m} b_k 8^k$$

Dus de rij wordt

$$(0, 1, 8, 9, 64, 65, 72, 73, 512, 513, 520, 521, 576, 577, 584, 585, \cdots)$$

We bewijzen eerst dat voor deze rij $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ inderdaad elk natuurlijk getal kan geschreven worden als $a_i + 2a_j + 4a_k$. Neem immers een willekeurig natuurlijk getal n, en schrijf n binair als $\overline{b_{3m-1} b_{3m-2} \cdots b_2 b_1 b_0}$. Kies (in binaire schrijfwijze)

$$i = \overline{b_{3(m-1)} b_{3(m-2)} \cdots b_6 b_3 b_0}$$

$$j = \overline{b_{3(m-1)+1} b_{3(m-2)+1} \cdots b_7 b_4 b_1}$$

$$k = \overline{b_{3(m-1)+2} b_{3(m-2)+2} \cdots b_8 b_5 b_2}$$

Het is eenvoudig na te gaan dat nu inderdaad $n = a_i + 2a_j + 4a_k$.

Vervolgens bewijzen we dat deze rij uniek is. Stel immers uit het ongerijmde dat er ook een andere rij $(b_0, b_1, b_2, \cdots)$ aan de vraag voldoet. Zij dan n het kleinste getal zodat $a_n \neq b_n$. Neem aan dat $a_n < b_n$. (Het andere geval gaat analoog.) Nu is $a_0 = 0$ dus $a_n = a_n + 2a_0 + 4a_0$. Omdat deze schrijfwijze uniek is, zijn er geen a_i, a_j, a_k met $i, j, k < n$ zodat $a_n = a_i + 2a_j + 4a_k$. Omdat $a_i = b_i$ voor alle $i < n$, zijn er dus ook geen b_i, b_j, b_k met $i, j, k < n$ zodat $a_n = b_i + 2b_j + 4b_k$. Maar $b_i > a_n$ voor $i \geq n$. Bijgevolg kan het getal a_n onmogelijk geschreven worden als $b_i + 2b_j + 4b_k$, wat in tegenspraak is met het feit dat $(b_0, b_1, b_2, \cdots)$ ook aan de vraag voldoet.

De eerder gedefinieerde rij $(a_0, a_1, a_2, \cdots)$ is dus de enige die aan de vraag voldoet. We moeten nu nog enkel de waarde van a_{2006} bepalen. Daarvoor schrijven we 2006 binair als

$$2006 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2 = \overline{11111010110}$$

Bijgevolg is a_{2006} gedefinieerd als

$$8^{10} + 8^9 + 8^8 + 8^7 + 8^6 + 8^4 + 8^2 + 8 = 1227100232$$