Beloftencompetitie
November 2006

1. Gegeven is een natuurlijk getal a met juist n cijfers in decimale schrijfwijze, en een tweede natuurlijk getal b dat ontstaat door de cijfers van a van op willekeurige wijze van volgorde te veranderen (permuteren). Is het mogelijk dat

$$a + b = 10^n - 1$$

als $n = 2006$? En als $n = 2007$?

2. Een natuurlijk getal a noemen we k-*machtig* als elke (positieve) deler van a rest 1 geeft bij deling door k.

   (a) Het aantal delers van een natuurlijk getal n is k-machtig. Bewijs dat n de k'de macht van een natuurlijk getal is.

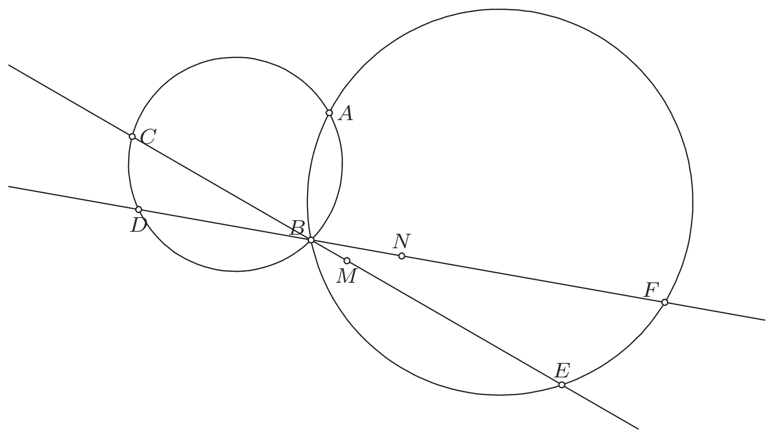
   (b) Bewijs dat de omgekeerde stelling niet waar is. Met andere woorden: als n de k'de macht van een natuurlijk getal is, is het aantal delers van n niet steeds k-machtig.

3. Gegeven is een natuurlijk getal a, waarvoor $3a$ kan geschreven worden als $x^2 + 2y^2$ met x en y natuurlijk getallen (inclusief 0).

   Bewijs dat a ook kan geschreven worden als $x^2 + 2y^2$ met x en y (andere) natuurlijk getallen.

4. Twee cirkels snijden elkaar in, A en B. Een rechte door B snijdt de eerste cirkel ook in C en de tweede cirkel ook in E. Een andere rechte door B snijdt de eerste cirkel ook in D en de tweede cirkel ook in F. Daarbij ligt B tussen C en E, en tussen D en F. Noem het midden van het lijnstuk CE M en het midden van DF N.

   Bewijs dat de driehoeken ACD, AEF en AMN gelijkvormig zijn.



5. Gegeven is een strikt stijgende rij natuurlijke getallen $(0, a_1, a_2, a_3, \cdots)$. Daarbij zijn er voor elk natuurlijk getal n, unieke getallen i, j en k (niet noodzakelijk verschillend) zodat

$$n = a_i + 2a_j + 4a_k$$

Bepaal (en bewijs) de waarde van a_{2006}.