Beloftencompetitie: oplossingen
Oktober 2006

1. *De eerste vraag was een eenvoudig probleem over deelbaarheid. Wel moest je oppassen voor het speciale geval dat 1 door geen enkel priemgetal deelbaar is.*

   Juist drie van de zes opeenvolgende getallen zijn deelbaar door 2. Juist twee van de zes getallen zijn deelbaar door 3, waarvan er een al deelbaar door 2 is. Ten hoogste twee van de zes getallen zijn deelbaar door 5, en als er twee zo'n getallen zijn, is zeker een van de twee deelbaar door 2.

   Ten hoogste vijf van de zes getallen zijn dus deelbaar door 2, 3 of 5. Het zesde getal is bijgevolg ofwel 1, ofwel deelbaar door een priemgetal verschillend van 2, 3 en 5.

   Als het zesde getal 1 is, is de rij $1, 2, 3, 4, 5, 6$, en is 5 een priemgetal dat juist één van de zes getallen deelt.

   In het andere geval is er een getal deelbaar door een priemgetal p verschillend van 2, 3 en 5, en dus is $p > 6$. Bijgevolg kan p geen deler zijn van een ander van de zes opeenvolgende getallen, en is p een priemgetal dat aan de vraag voldoet.

2. *De Diophantische vergelijking van de tweede vraag kon op verschillende manieren opgelost worden. De volgende oplossing werd gegeven door Mats Vermeeren:*

   De gelijkheid
   $$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$
   is equivalent met
   $$(x + y)^3 = 7xy(x + y) + 4$$
   Dus $(x+y)^3$ moet rest 4 geven bij deling door 7. Dit is echter nooit het geval, wat de rest van $x+y$ bij deling door 7 ook is. (Het is voldoende om de rest van a^3 bij deling door 7 te bepalen voor $a = 0, 1, 2, \cdots, 6$, want als a en b dezelfde rest geven bij deling door 7, dan geven ook a^3 en b^3 dezelfde rest bij deling door 7.) De vergelijking heeft dus geen gehele oplossingen.

   Een andere oplossing kwam van Mohammed Ahkim:

   De gelijkheid
   $$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$
   is equivalent met
   $$(x + y)\left((x + y)^2 - 7xy\right) = 4$$
   Omdat beide factoren in het linkerlid geheel zijn, en $4 = 2^2$, kunnen we zes gevallen onderscheiden:

   - $x+y = \pm 1$. Dan moet $1 - 7xy = \pm 4$ en bijgevolg is 1 ± 4 deelbaar door 7, wat onmogelijk is.
   - $x+y = \pm 2$. Dan moet $4 - 7xy = \pm 2$ en bijgevolg is 4 ± 2 deelbaar door 7, wat onmogelijk is.
   - $x + y = \pm 4$. Dan moet $16 - 7xy = \pm 1$ en bijgevolg is 16 ± 1 deelbaar door 7, wat onmogelijk is.

   We bekomen een tegenspraak in alle gevallen. De vergelijking heeft dus geen gehele oplossingen.

3. *Bij deze meetkundevraag moest je enerzijds bewijzen dat enkel het middelpunt van de omgeschreven cirkel aan het gevraagde kan voldoen, en anderzijds aantonen dat punt ook inderdaad aan het gevraagde voldoet.*

   We bewijzen dat P enkel en alleen het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC kan zijn.

Stel dat P aan de vraag voldoet. Omdat de som van de hoeken in driehoeken ABC en $A'B'C'$ gelijk is aan 180°, volgt meteen dat ook

$$\angle CAB = \angle C'A'B'$$

De hoek $\angle ABC = \angle C'BA'$ is een omtrekshoek van driehoek $A'BC'$ op de koorde $A'C'$. De hoek $\angle A'B'C'$ is een omtrekshoek van de driehoek $A'B'C'$ op diezelfde koorde $A'C'$. Omdat de twee omtrekshoeken op een even lange koorde gelijk zijn (gegeven), zijn de omgeschreven cirkels van $A'BC'$ en $A'B'C'$ even groot. Analoog zijn ook de omgeschreven cirkels van $B'CA'$ en $C'AB'$ even groot als de omgeschreven cirkel van $A'B'C'$.

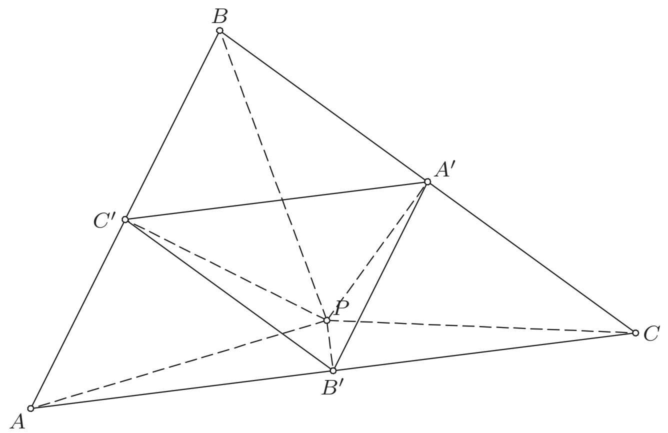
$PC'BA'$ is een koordenvierhoek met diameter PB, want de omtrekshoeken $\angle PC'B$ en $\angle BA'P$ zijn per constructie van A' en C' beide rechte hoeken. Bijgevolg is de PB ook de diameter van de omgeschreven cirkel van driehoek $C'BA'$. Analoog zijn PC en PA de diameters van de omgeschreven cirkels van respectievelijk $A'CB'$ en $B'AC'$. Aangezien deze drie omgeschreven cirkels even groot zijn, geldt $PA = PB = PC$. P moet dus op gelijke afstand van A, B en C liggen, en er is slechts één punt waarvoor dit geldt: dit is per definitie het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC.

We moeten nu nog bewijzen dat als P het middelpunt van de omgeschreven cirkel is, de gelijkheden uit de opgave inderdaad geldig zijn. Als P het middelpunt van de omgeschreven cirkel is, is P ook het snijpunt van de middelloodlijnen van de zijden van ABC. Bijgevolg zijn A', B' en C' de middens van respectievelijk BC, CA en AB. De driehoek $A'B'C'$ wordt dus gevormd door de middenparallellen van ABC, zodat $A'B'C'$ en ABC gelijkvormig zijn. Uit die gelijkvormigheid volgt meteen dat

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

$$\angle BCA = \angle B'C'A'$$

zodat het middelpunt van de omgeschreven cirkel inderdaad een punt is dat aan de vraag voldoet.



4. *De combinatoriekvraag was waarschijnlijk de moeilijkste vraag uit deze competitie. De oplossing oogt vrij eenvoudig, maar het is zeer moeilijk om zelf op de juiste weg te komen.*

We moeten met andere woorden bewijzen dat er in de cirkel 21 personen naast elkaar zitten die allen een verschillend nummer hebben.

Neem een nummer n, zodat er tussen de man en de vrouw met dat nummer een minimaal aantal personen zit (bekeken langs de *kortste weg langs de cirkel*).

Stel uit het ongerijmde dat er tussen de man en de vrouw met nummer n, personen van beide geslachten zitten. Als er hierbij met de klok mee van de man naar de vrouw met nummer n gegaan wordt, zitten dan zowel de man als de vrouw met nummer $n+1 \mod 21$ tussen beiden. (Dit wegens de manier waarop er genummerd werd.) Als er tegen de klok in van de man naar de vrouw met nummer n gegaan wordt, zitten zowel de man als de vrouw met nummer $n-1 \mod 21$ tussen beiden. In beide gevallen bekomen we een tegenspraak met de keuze van n (het minimaal zijn van de *afstand* tussen de man en de vrouw met hetzelfde nummer). Tussen het koppel met nummer n zitten dus personen van hetzelfde geslacht.

Stel nu zonder verlies van algemeenheid dat alle personen tussen de man en vrouw met nummer n mannen zijn. (In het andere geval *gaat* men in het vervolg van het bewijs van vrouw naar man in plaats van omgekeerd.)

Stel nu dat men langs de *kortste weg* met de klok mee van de man naar de vrouw met n gaat. Bekijk dan de 21 personen die met de klok mee na deze man komen. Als er hierbij k mannen zijn, dan zijn dit de mannen met nummers $n+1, n+2, \cdots, n+k$ (alle getallen modulo 21). De vrouwen bij deze personen, zijn echter diegenen de nummers n en voorgaande. (Tussen de man en vrouw met nummer n zitten immers enkel mannen.) Bijgevolg hebben deze 21 allen verschillende nummers.

Als men tegen de klok in van de man naar de vrouw gaat, kan men analoog redeneren, waarbij men dan bij de 21 personen echter de mannen met nummers $n-1, \cdots, n-k$ (modulo 21) en de vrouwen met nummers n en volgende vindt. Maar ook hier hebben we dus 21 personen met verschillende nummers.

5. *Dat een natuurlijk getal n op de gevraagde wijze geschreven kan worden als en slechts als $n-2$ geen oneven delers groter van 1 heeft, is een verrassend resultaat. Maar zowel Mohammed Ahkim als Mats Vermeeren slaagden erin om het te bewijzen, waarbij vooral het onderstaande bewijs van Mohammed erg elegant was.*

   We tonen aan dat n een dergelijke schrijfwijze heeft als $n-2$ geen macht van 2 is, of equivalent: $n-2$ heeft een oneven deler groter dan 1.

   Neem een bepaald natuurlijk getal n waarvoor

$$n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$$

   Dan is

$$\begin{aligned} n-2 &= \frac{a}{b} - \frac{b}{b} + \frac{a+1}{b+1} - \frac{b+1}{b+1} \\ &= \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1} \\ &= \frac{(a-b)(2b+1)}{b(b+1)} \end{aligned}$$

   Omdat b, $b+1$ en $2b+1$ relatief priem zijn, moet $b(b+1)$ een deler zijn van $a-b$, en is $2b+1>1$ een oneven deler van $n-2$. $n-2$ is dus geen macht van 2.

   Stel nu omgekeerd dan $n>1$ en $n-2$ deelbaar is door het oneven getal $2b+1>1$. Dan is $n-2 = x(2b+1)$ voor een zekere x. Stel $a = b + xb(b+1)$. Dan is

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} &= \frac{b+xb(b+1)}{b} + \frac{b+xb(b+1)+1}{b+1} \\ &= (1+x(b+1)) + (xb+1) \\ &= x(2b+1)+2 \\ &= (n-2)+2 \\ &= n \end{aligned}$$

   dus n kan in de gevraagde vorm geschreven worden, wat het bewijs voltooit.