

Beloftencompetitie

Oktober 2006

1. Gegeven zijn zes opeenvolgende natuurlijke getallen groter dan 0. Bewijs dat er een priemgetal bestaat, dat een deler is van juist één van de zes getallen.
2. Bewijs dat de gelijkheid

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

geen gehele oplossingen heeft in x en y .

3. Gegeven is een scherphoekige driehoek ABC en een punt P in het inwendige van die driehoek. Noem de voetpunten van de loodlijnen uit P op BC , CA en AB respectievelijk A' , B' en C' . Bepaal mogelijke posities van P waarvoor

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

en

$$\angle BCA = \angle B'C'A'$$

4. 21 mannen en 21 vrouwen nemen deel aan een koppel-sessie van een relatiebureau. Ze gaan willekeurig zitten op stoelen, die gerangschikt staan volgens een regelmatige 42-hoek. Om koppels te vormen, wordt aan elke deelnemer een nummer gegeven, en wel op de volgende manier:
 - Een willekeurige man krijgt nummer 1, vervolgens gaat men de klok mee naar de volgende man die nummer 2 krijgt, en verder met de klok mee tot de laatste man die nummer n krijgt.
 - Een willekeurige vrouw krijgt nummer 1, vervolgens gaat men tegen de klok in naar de volgende vrouw die nummer 2 krijgen, en verder tegen de klok in tot de laatste vrouw die nummer n krijgt.

Een man en een vrouw met hetzelfde cijfer, vormen een koppel. Bewijs dat men de groep met een rechte lijn in twee kan verdelen, zodat geen twee gekoppelde mensen in hetzelfde deel zitten.

5. Bepaal alle natuurlijke getallen n , die geschreven kunnen worden als

$$n = \frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$$

waarbij a en b natuurlijke getallen zijn.