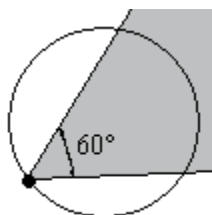


## Beloftencompetitie

Januari 2006

1. Bestaat er een natuurlijk getal dat deelbaar is door 2006 en waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 2006? Motiveer je antwoord.
2. 13 heksen (die we voorstellen als punten in het vlak), houden een geheime bijeenkomst. Alle heksen gaan zitten op een willekeurige plaats op een cirkel. Een heks heeft een gezichtshoek van  $60^\circ$ , dat wil zeggen dat het gebied dat een heks op een bepaald moment kan zien, begrensd wordt door twee halfrechten die elkaar snijden in een hoek van  $60^\circ$ , zoals op de figuur.



Bewijs dat er een heks is die, door in de juiste richting te kijken, minstens 5 andere heksen kan zien zitten.

3. Zij  $f$  een functie waarvoor geldt dat  $f(2n) = f(2n+1)$ ,  $f(3n) = f(3n+1)$  en  $f(5n) = f(5n+1)$  voor elk natuurlijk getal  $n$ . We passen deze functie toe op alle natuurlijke getallen kleiner dan 2006. Hoeveel verschillende functiewaarden kunnen we maximaal bekomen?
4. Bewijs dat voor alle  $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$  met  $ab + bc + ca = 2$  geldt:

$$abc \left( \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \right) < 1$$

5. Zij  $ABCD$  een vierhoek met een ingeschreven en een omgeschreven cirkel. Veronderstel dat de ingeschreven cirkel aan de zijden  $AB$  en  $CD$  raakt in de punten  $E$  en  $F$  respectievelijk. Bewijs dat

$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$$