Beloftencompetitie: oplossingen
December 2005

1. *De eerste vraag vereist enkel een basisbegrip van samengestelde getallen en priemgetallen. Toch bleken er veel valkuilen in deze vraag te zitten. Dat je 'A als en slechts als B' in twee richtingen moet bewijzen ('als A dan B' en 'als B dan A') was niet voor iedereen duidelijk. Ook hadden sommige deelnemers moeite om hun bewijs in correcte bewoordingen op te schrijven.*

   - Stel dat n een samengesteld getal is. Dan kan n geschreven worden als het product van twee natuurlijke getallen a_1, a_2 met $1 < a_1 \leq a_2 < n$. Omdat a_1 minstens 2 is, geldt
   $$n = a_1 a_2 \geq 2 \cdot a_2 = a_2 + a_2 \geq a_1 + a_2$$
   Als $a_1 + a_2 = n$ zijn we klaar. Als $a_1 + a_2 < n$ kunnen we dus $a_3 = \ldots = a_p = 1$ kiezen zodat
   $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_p = n$$
   Bovendien is
   $$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_p = a_1 \cdot a_2 \cdot 1 = n$$
   Dus elk samengesteld getal is inderdaad een som-product-getal.
   - Stel dat n priem is. Als we n willen schrijven als
   $$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_p$$
   is er juist één $a_i = n$ en alle andere $a_i = 1$. Maar dan is
   $$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = n + (p-1)1 > n$$
   Een priemgetal kan dus nooit een som-product-getal zijn.

   Deze twee beweringen samen tonen aan dat een natuurlijk getal groter dan 2 een som-product-getal is als en slechts als het een samengesteld getal is.

2. *Deze vraag was onder andere een vraag in de tweede ronde van de VWO in 1989. Alle deelnemers losten deze vraag grotendeels correct op.*

   Noem het middelpunt van de cirkel O. Noem de drie hoekpunten van de driehoek A, B en C met $\overset{\frown}{AB}= 5$, $\overset{\frown}{BC}= 4$ en $\overset{\frown}{CA}= 3$. Dan is
   $$\angle AOB = \frac{5 \cdot 2\pi}{12} = \frac{5}{6}\pi$$
   $$\angle BOC = \frac{4 \cdot 2\pi}{12} = \frac{2}{3}\pi$$
   $$\angle COA = \frac{3 \cdot 2\pi}{12} = \frac{1}{2}\pi$$
   De omtrek van de cirkel is 12, dus de straal is $\frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi}$. Bijgevolg is ook $|OA| = |OB| = |OC| = \frac{6}{\pi}$. We kunnen nu de oppervlakte van drie kleine driehoekjes berekenen:
   $$\text{Opp. } AOB = \frac{|OA||OB| \sin \angle AOB}{2} = \frac{18}{\pi^2}\frac{1}{2}$$
   $$\text{Opp. } BOC = \frac{|OB||OC| \sin \angle BOC}{2} = \frac{18}{\pi^2}\frac{\sqrt{3}}{2}$$
   $$\text{Opp. } COA = \frac{|OC||OA| \sin \angle COA}{2} = \frac{18}{\pi^2}$$
   De oppervlakte van ABC is de som van de oppervlakten van deze kleine driehoekjes, en is dus gelijk aan
   $$\frac{9}{\pi^2}(3 + \sqrt{3})$$

3. *Dit spitsvondige probleem bleek de moeilijkste vraag van deze competitie te zijn. Weliswaar is de oplossing heel kort en elegant, maar er is veel inzicht vereist om het probleem op de juiste manier aan te pakken.*

   Noem n het aantal paren bevriende inwoners wiens huiskleur detzelfde is. n kan niet willekeurig groot worden, want n is naar boven begrensd door het geval waarin alle bevriende inwoners dezelfde huiskeur hebben.

   Als een inwoner van het eiland zijn huis herschildert, betekent dit dat meer vrienden zijn nieuwe huiskleur hebben, dan zijn oude huiskleur. n zal dus steeds groter worden als een inwoner zijn huis herschildert. Maar n is naar boven begrensd, dus de bewoners zullen slechts een eindig aantal keer hun huis herschilderen.

4. *Bij de vierde vraag kwam het erop aan om een beetje te spelen met resten. Ook als je niet het hele probleem kon oplossen, was het hier zeker mogelijk om enkele zaken en vinden en toch nog een aantal punten te krijgen.*

   We zien meteen dat $p \neq q \neq r$ (veronderstel dat $p = q$, dan is $rp + q^2 = rp + p^2 = p(r + p)$, en analoge redeneringen).

   Veronderstel dat p, q, r alledrie oneven zijn. Dan is $pq + r$ even en groter dan 2, en dus een samengesteld getal. Dit mag niet, daarom moet p, q of r een even getal zijn. Het enige even priemgetal is 2, dus $p = 2$.

   $qr + p$ wordt nu $qr + 2$ en $qr + p^2$ geeft $qr + 4$. Beide uitdrukkingen moeten priem zijn, dus geen van beide mag deelbaar zijn door 3. Bijgevolg moet qr zelf deelbaar zijn door 3. Dit kan enkel door $q = 3$ te nemen.

   We hebben nu dat $2r + 3$, $2r + 9$, $3r + 2$, $3r + 4$, $6 + r$ en $6 + r^2$ allemaal priem moeten zijn. We kijken nu van alle getallen de rest bij deling door 10 en schrijven $a \equiv b$ als a en b dezelfde rest geven.

   - Veronerderstel dat $r \equiv 1$. Dan is $2r + 3 \equiv 5$, en dus deelbaar door 5.
   - Veronderstel dat $r \equiv 3$. Dan is $2r + 9 \equiv 5$, en dus deelbaar door 5.
   - Veronderstel dat $r \equiv 7$. Dan is $3r + 4 \equiv 5$, en dus deelbaar door 5.
   - Veronderstel dat $r \equiv 9$. Dan is $6 + r \equiv 5$, en dus deelbaar door 5.

   De enige mogelijke oplossing opdat alle uitdrukkingen priem zouden zijn, is bijgevolg $r \equiv 5$. Omdat r priem is, kan dit enkel met $r = 5$.

   De enige kandidaatoplossing is dus $p = 2, r = 3$ en $q = 5$. Hieruit volgt $pq+r = 11$, $pq+r^2 = 31$, $qr+p = 17$, $qr+p^2 = 19$, $rp+q = 13$ en $rp+q^2 = 19$, dus dit is inderdaad een goede oplossing.

5. *Deze vraag werd onder andere gesteld in 1991 in Vietnam en in 1998 in Wallonië. Dit type vraag - een functievergelijking - vraagt een wat speciale oplossingsstrategie: probeer eerst enkele bepaalde waarden te vinden (bv. $f(0)$), en probeer uit die basis meer informatie te halen. Ook de laaste stap mag je zeker niet vergeten: controleer of je antwoord ook effectief een oplossing is.*

   Door $x = y = z = 0$ in te vullen, krijgen we: $f(0) - f(0)^2 \geq \frac{1}{4}$ en dus $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$. Dit kan enkel als $f(0) = \frac{1}{2}$. Analoog krijgen we $f(1) = \frac{1}{2}$ door $x = y = z = 1$ in te vullen.

   Als we nu $x = 1$ en $y = 0$ invullen, krijgen we

   $$\frac{f(0) + f(z)}{2} - f(1)f(0) \geq \frac{1}{4}$$

   en dus $f(z) \geq \frac{1}{2}$ voor alle reële getallen z.

   Door echter $x = 0$ en $y = 1$ in te vullen, krijgen we dat

   $$\frac{f(0) + f(0)}{2} - f(0)f(z) \geq \frac{1}{4}$$

en dus dat $f(z) \leq \frac{1}{2}$ voor alle reële getallen z.

De enige mogelijke oplossing is dus $f(x) = \frac{1}{2}$ voor alle rele getallen x. Dit is inderdaad een oplossing, want dan is

$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) = \frac{1}{4}$$