Beloftencompetitie
December 2005

1. We noemen een natuurlijk getal n een som-product-getal als er natuurlijke getallen $a_1, a_2, \ldots, a_p$ ($p \geq 2$) bestaan zodat
$$n = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_p = a_1 + a_2 + \cdots + a_p$$
Bewijs dat $n \geq 2$ een som-product-getal is als en slechts als n samengesteld (niet-priem) is.

2. Een driehoek is ingeschreven in een cirkel. De hoekpunten van de driehoek verdelen de cirkel in drie bogen met respectievelijke lengten 3, 4 en 5. Bepaal de oppervlakte van de driehoek.

3. Op een eiland leven 12 (onsterfelijke) mensen. Elk paar bewoners is ofwel bevriend, ofwel niet bevriend. Elke inwoner heeft een eigen huis, dat ofwel wit, ofwel rood gekleurd is. Elke maand van het jaar is toegewezen aan een inwoner als bezoekmaand. Een bewoner zal tijdens zijn bezoekmaand al zijn vrienden een bezoekje brengen. Als hij daarbij merkt dat meer dan de helft van de huizen van zijn vrienden een andere kleur hebben dan zijn huis, zal hij meteen zijn eigen huis herschilderen in de andere kleur. Bewijs dat de eilandbewoners voldoende hebben aan een eindige hoeveelheid verf.

4. Zoek alle priemgetallen $p \leq q \leq r$ zodat ook $pq + r$, $pq + r^2$, $qr + p$, $qr + p^2$, $rp + q$ en $rp + q^2$ priem zijn.

5. Vind alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat voor alle reële getallen x, y, z geldt
$$\frac{f(xy) + f(xz)}{2} - f(x)f(yz) \geq \frac{1}{4}$$