Beloftencompetitie
November 2005

1. *Deze stelling zou tot je basiskennis moeten behoren, of je zou toch op z'n minst moeten aanvoelen waarom de stelling waar is. De stelling bewijzen kan gemakkelijk en elegant door met oppervlaktes van kleine driehoekjes te rekenen, zoals hieronder. Als alternatieve oplosing kan je met congruente driehoeken bewijzen dat de afstand van B en C tot de zwaartelijn uit A gelijk is.*

   Zij M het midden van BC. MA is een zwaartelijn dus $|BM| = |CM|$. De oppervlaktes van de driehoeken ΔBAM en ΔCAM zijn bijgevolg gelijk, net als de oppervlaktes van ΔBZM en ΔCZM. Nemen we het verschil van deze oppervlakjes, krijgen we dat ook de oppervlaktes van ΔBAZ en ΔCAZ gelijk zijn. Volgens de formule voor de oppervlakte van een driehoek volgt dat $|AB| \cdot d(AB, Z) = |AC| \cdot d(AC, Z)$, wat gevraagd werd.

2. *Alle deelnemers ontdekten dat werken met veelvouden van drie de sleutel tot de oplossing was. Bij de afwerking werden echter een aantal punten verloren. Belangrijk is het het geval dat er nog 4 frieten overblijven, en er dus geen vijf frieten meer genomen kunnen worden, apart te bekijken. Dit lijkt misschien triviaal, maar als je andere getalletjes neemt, kunnen dergelijke eindsituaties de oplossing van het hele probleem nog in de war sturen.*

   We laten een strategie voor Guy zien zodat hij nooit de laatste friet moet nemen. Indien Albert 1 friet neemt, pakt Guy vervolgens 2 frieten. Indien Albert 2 of 5 frieten neemt, pakt Guy 1 friet. Per beurt worden zo steeds 3 of $6 = 2 \cdot 3$ frieten opgegeten. Omdat 2005 rest 1 geeft bij deling door 3, blijven er op het einde steeds 1 of 4 frieten over. Als er 1 friet overblijft moet Albert die pakken en verliest hij. Als er 4 frieten overblijven kan Albert enkel 1 of 2 frieten pakken. Dan reageert Guy door respectievelijk 2 of 1 friet te nemen, zodat er opnieuw 1 friet overblijft die Albert moet pakken.

3. *Al wie begrepen had dat inductie de manier was om deze vraag aan te pakken, leverde ook meteen een volledig correcte oplossing in.*

   We geven een bewijs met volledige inductie.

   - Neem $n = 1$. Dan is inderdaad $\frac{2}{3} < \frac{4}{2}$
   - Neem $n = 2$. Dan is inderdaad $\frac{4}{9} < \frac{4}{6}$
   - Neem $n = 3$. Dan is inderdaad $\frac{8}{27} < \frac{4}{12}$
   - Neem $n = 4$. Dan is inderdaad $\frac{16}{81} < \frac{4}{20}$
   - Neem nu $n \geq 4$ willekeurig, dan geldt

     $$3n \geq 2(n+2)$$
     $$\frac{2}{3} \leq \frac{n}{n+2} \tag{1}$$

     Veronderstel nu dat
     $$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{4}{n(n+1)}$$

     Door met (1) te vermenigvuldigen krijgen we
     $$\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

     Als de ongelijkheid geldt voor $n \geq 4$, geldt ze dus ook voor $n+1$, waardoor de ongelijkheid geldt voor alle natuurlijke getallen.

4. *Bijna alle deelnemers vonden een oplossing voor vraag vier. Een essentieel punt in het bewijs van beide delen dat echter soms vergeten werd, is het feit dat 11 priem is. Eigenlijk moest er ook bewezen worden dat ook het check digit a_{10} mag gewijzigd of verwisseld worden, maar omdat de vraag aanvankelijk onduidelijk gesteld was, zijn we hier mild over geweest.*

   We schrijven $a \equiv b \bmod 11$ als a en b een gelijke rest geven bij deling door 11.

   De voorwaarde voor een geldige code kunnen we dus schrijven als

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 9a_9 \equiv a_{10} \bmod 11$$

   Wat equivalent is met

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 9a_9 + 10a_{10} \equiv 0 \bmod 11$$

   (a) Stel dat we toch een teken - zeg $i$de teken - kunnen veranderen van b naar c zodat de code geldig blijft. Door de verandering wijzigt de som met $i(c-b)$. Opdat de som een veelvoud van 11 blijft, moet $i(c-b)$ ook een veelvoud van 11 zijn. Omdat 11 priem is, moet dan ofwel i, ofwel $(c-b)$ zelf een veelvoud van 11 zijn. Maar i, b en c kunnen slechts de waarden van 1 tot en met 10 aannemen. i is bijgevolg geen veelvoud van 11, en $|c-b| < 10$. De code kan dus enkel geldig blijven als $|c-b| = 0$, maar dan zijn b en c gelijk, en verandert de code helemaal niet. We kunnen dus nooit een teken veranderen zonder dat de code ongeldig wordt.

   (b) Stel dat we toch twee tekens - zeg $i$de teken met waarde b en het $j$de teken met waarde c - kunnen omwisselen zodat de code geldig blijft. Door de verandering wijzigt de som met $i(c-b) + j(b-c) = (i-j)(c-b)$. Opdat de som een veelvoud van 11 blijft, moet $(i-j)(c-b)$ ook een veelvoud van 11 zijn. Omdat 11 priem is, moet dan ofwel $(i-j)$, ofwel $(c-b)$ zelf een veelvoud van 11 zijn. Maar i, j, b en c kunnen slechts de waarden van 1 tot en met 10 aannemen. Bijgevolg is $|i-j| < 10$ en $|c-b| < 10$. De code kan dus enkel geldig blijven als ofwel $|i-j| = 0$, ofwel $|b-c| = 0$. In het eerste geval zijn i en j gelijk en worden er geen tekens omgewisseld. In het tweede geval zijn b en c gelijk, en wijzigd de code helemaal niet. We kunnen dus nooit twee tekens omwisselen zonder dat de code ongeldig wordt.

5. *Dit was een moeilijke vraag, afkomstig van de Canadese Wiskunde Olympiade van 2000. Het is niet alleen moeilijk om het juiste idee te vinden, maar ook heel lastig om de oplossing goed te verwoorden. Niemand haalde hier een perfecte score, al kwamen Christophe en Arne wel in de buurt.*

   We stellen zonder verlies van algemeenheid dat Zeno stilstaat. We noemen de 100m lange zone op meer dan 100m van Zeno de verre zone. We moeten bewijzen dat Achilles en de Schildpad op een gegeven moment allebei in de verre zone zullen zijn. Merk op dat het hele probleem symmetrisch is, en dat het dus niets uitmaakt in welke richting Achilles en de Schildpad lopen. Noem a de snelheid van Achilles en s de snelheid van de Schildpad ten opzichte van Zeno. Stel opnieuw zonder verlies van algemeenheid dat $s \leq a$. We onderscheiden nu twee gevallen.

   - $s \leq a < 2s$. Voordat Achilles zich voor het eerst 200m verwijderd heeft van Zeno, heeft ook de Schildpad zich reeds 100m verwijderd van Zeno. Ze bevinden zich dus tegelijkertijd in de verre zone.
   - $2s \leq a$. Op de tijd dat de Schildpad de volledige verre zone afloopt, legt Achilles en afstand af van minstens 200m. Minstens 1 punt van die 200m ligt ook in de verre zone, dus de Schildpad en Achilles zullen ook in dit geval tegelijk in de verre zone zijn.