

## Beloftencompetitie

November 2005

1. Zij  $\triangle ABC$  een willekeurige driehoek met zwaartepunt  $Z$ . Bewijs dat

$$|AB| \cdot d(AB, Z) = |AC| \cdot d(AC, Z)$$

waarbij  $d(y, X)$  staat voor de afstand van de rechte  $y$  tot het punt  $X$ .

2. Om het 175-jarig bestaan van België te vieren, hebben Guy en Albert een enorme zak met 2005 frieten gekocht. Ze spreken af dat ze om de beurt een aantal frieten opeten, waarbij ieder per beurt juist 1, 2 of 5 frieten moet opeten. Albert begint. Wie de laatste friet eet, moet de rekening betalen. Vind een strategie voor Albert of Guy die een van beiden toelaat om niets te moeten betalen, ongeacht wat de ander doet.

3. Bewijs dat

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{4}{n(n+1)}$$

voor alle strikt positieve natuurlijk getallen  $n$ .

4. Een ISBN-code, de internationale code voor boeken, bestaat uit tien getallen:  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ . De eerste negen getallen zijn cijfers. Het tiende, het zogenaamde check digit, is een getal van 0 tot en met 10. Een code is geldig als en slechts als het check digit gelijk is aan de rest van  $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 9a_9$  bij deling door 11.

- (a) Bewijs dat een geldige code steeds ongeldig wordt als men een getal wijzigt.
- (b) Bewijs dat een geldige code steeds ongeldig wordt als men twee verschillende getallen van plaats verwisselt.

5. Achilles, de Schildpad en Zeno houden een loopwedstrijd op een cirkelvormig parcours dat 300 meter lang is. Ze starten alledrie op hetzelfde punt. Elke loper houdt een constante snelheid aan voor een onbepaalde tijd. Geen twee deelnemers lopen aan dezelfde snelheid. Toon aan dat Zeno op een bepaald moment minstens 100 meter verwijderd zal zijn van zowel Achilles als de Schildpad, waarbij de afstand gemeten wordt langs de baan.