Beloftencompetitie
Oktober 2005
Oplossingen

1. *De eerste vraag was voor alle deelnemers een gemakkelijk opwarmertje, waar de enige valkuil het triviale geval van $p = 3$ bleek te zijn.*

   (a) Stel $p = 3$. Dan is $8p - 1 = 23$ priem, maar $8p + 1 = 25$ niet.

   (b) Stel $p \neq 3$. Dan is $8p$ niet deelbaar door 3. $8p - 1$ is priem en dus ook niet deelbaar door 3. Aangezien van drie opeenvolgende getallen er steeds één deelbaar is door 3, is $8p + 1$ deelbaar door 3 en dus nooit priem.

2. *Op de tweede vraag haalden alle deelnemers een perfecte score. De oplossingsmethode was niet altijd even efficiënt, maar werkte wel bij iedereen. Christophe Debry gaf overigens een bijzonder elegante oplossing voor dit probleem.*

   We zoeken alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ zodat

   $$n + (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + m) = 2005$$

   Er zijn $m + 1$ termen, met als gemiddelde $(2n + m)/2$. Dus

   $$(m + 1)(2n + m) = 2 \cdot 2005 = 2 \cdot 5 \cdot 401$$

   Er geldt bovendien dat $1 < m + 1 < 2n + m$, waaruit volgt dat de factor $2n + m$ steeds de priemfactor 401 zal bevatten. Voor $m + 1$ blijven er dus drie mogelijkheden over:

   (a) $m + 1 = 2 \Rightarrow m = 1$ en $n = 1002$
   $2005 = 1002 + 1003$

   (b) $m + 1 = 5 \Rightarrow m = 4$ en $n = 399$
   $2005 = 399 + 400 + 401 + 402 + 403$

   (c) $m + 1 = 10 \Rightarrow m = 9$ en $n = 196$
   $2005 = 196 + 197 + ... + 205$

3. *De deelnemers hadden verrassend veel moeite om bij dit probleem het juiste inzicht te krijgen om de driehoeksongelijkheid te schrijven in functie van de hoogtelijnen in plaats van in functie van de zijden. Jan Vonk had het in feite nog veel minder evident idee om de formule van Heroon te gebruiken, maar hij slaagde er wel als enige in om een correct bewijs te vinden.*

   Noem de zijden van de driehoek a, b en c en noem de hoogtelijnen op deze zijden respectievelijk $h_a = 3$, $h_b = 12$ en h_c. Als A de oppervlakte van de driehoek is, geldt er $2A = a \cdot h_a$ zodat $a = \frac{2A}{h_a}$, en analoge relaties voor de andere zijden. De driehoeksongelijkheid $a < b + c$ wordt nu

   $$\frac{2A}{h_a} < \frac{2A}{h_b} + \frac{2A}{h_c}$$

   en dus

   $$\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} = \frac{h_b - h_a}{h_b h_a} < \frac{1}{h_c}$$

   zodat

   $$h_c < \frac{h_b h_a}{h_b - h_a} = 4$$

   Door te vertrekken van $c < a + b$ verkrijgen we op analoge manier dat

   $$h_c > \frac{h_a h_b}{h_a + h_b} = \frac{12}{5} > 2$$

   Door deze twee resultaten te combineren hebben we dat $2 < h_c < 4$. 3 is dus de enige mogelijke natuurlijke waarde voor de derde hoogtelijn.

4. *Q-E-D heeft respect voor jullie moed bij het oplossen van deze vraag, want met veel ijver probeerde de deelnemers deze vraag op te lossen door alle mogelijkheden systematisch af te gaan, wat meer dan behoorlijk lukte. Helaas had niemand het idee om het aantal mogelijkheden recursief te bekijken, zoals in de volgende modeloplossing, wat het rekenwerk aanzienlijk inperkt.*

   Noteer het aantal manieren om n dm af te leggen als a_n.

   Het is gemakkelijk te verifiëren dat $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ en $a_3 = 3$ en $a_4 = 6$.

   Om n dm ($n > 4$) af te leggen heft de robot steeds de volgende mogelijkheden: $n - 1$ dm en dan een stapje, $n - 2$ dm en dan een pas, of $n - 4$ dm en dan een sprong. Het aantal manieren om n dm af te leggen is dus $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-4}$.

   Zo verkrijgen we $a_5 = 10, a_6 = 18, a_7 = 31, a_8 = 55, a_9 = 96, a_{10} = 169$. De robot kan dus op 169 manieren 1m afleggen.

5. *De moeilijke laatste vraag, die afkomstig is van de Mexicaanse Olympiade van 1989, vereist niet zozeer creatief toepassen van meetkundestellingen, maar wel inzicht in hoe men het gegeven van rakende cirkels kan gebruiken om de straal van elke cirkel te vinden. Jan Vonk deed dit op heel elegante wijze door de (vrij onbekende) stelling van Descartes toe te passen, maar het bewijs kan ook op een (wat minder mooie) manier gevoerd worden zonder deze voorkennis.*

   Stel dat O het middelpunt is van C_0, A het middelpunt van C_1, B het middelpunt van C_2, X het middelpunt van C_3 en Y middelpunt van C_4. We moeten nu bewijzen dat $OAYX$ een rechthoek is.

   Noem de straal van C_3 x. Aangezien C_0 straal 2 heeft en C_0 raakt aan C_3, geldt $|OX| = 2 - x$ en dus $|OX|^2 = x^2 - 4x + 4$. In de rechthoekige driehoek ΔAOX kunnen we ook de stelling van Pythagoras toepassen: $|OX|^2 = |AX|^2 - |AO|^2 = (1 + x)^2 - 1 = x^2 + 2x$. Door deze twee vergelijkingen te combineren verkijgen we dat $-4x + 4 = 2x$ zodat $x = \frac{2}{3}$.

   Het is nu duidelijk dat $OAYX$ een rechthoek vormt als en slechts als de straal van C_4 gelijk is aan $\frac{1}{3}$. We construeren daarom de cirkel C_4' met straal $\frac{1}{3}$ en middelpunt Y' die raakt aan de cirkels C_1 en C_3. Door de stelling van Pythagoras toe te passen in de rechthoekige driehoek $\Delta Y'AO$ vinden we dat $|Y'O| = \sqrt{|Y'A|^2 + |AO|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 1} = \frac{5}{3}$. Door hier de straal $\frac{1}{3}$ bij op te tellen, krijgen exact 2, de straal van de grote cirkel C_0. Bijgevolg raakt C_4' aan C_0, en dus vallen de cirkels C_4 en C_4' samen. De straal van C_4 is daarom ook $\frac{1}{3}$, waaruit volgt dat $|AO| = |YX| = 1$ en $|AY| = |OX| = \frac{4}{3}$. $OAYX$ is dus een parallellogram, en omdat $\angle AOX = 90°$ is $OAYX$ ook een rechthoek.