Beginnerscompetitie
Augustus 2009
Oplossingen

1. Zij S het snijpunt van BP en AM. We bewijzen dat S het midden van $[AM]$ is. Zij Q het punt op $[CA]$ zodat $|AQ| = 2|CQ|$. Nu is $3|AP| = 2|AP| + |AP| = |AP| + |CP| = |AC|$ en analoog $3|CQ| = |AC|$, zodat
$$|PQ| = |AC| - |AP| - |CQ| = |AC| - \frac{1}{3}|AC| - \frac{1}{3}|AC| = \frac{1}{3}|AC| = |AP| = |CQ|.$$
Er volgt dat Q het midden is van $[CP]$ en dus is MQ een middenparallel in driehoek ΔBCP, zodat MQ en BP evenwijdig zijn. Omdat uit bovenstaande gelijkheid evenzeer volgt dat P het midden is van $[AQ]$, en omdat $PS = BP$ en MQ evenwijdig zijn, volgt in driehoek ΔAMQ dat PS een middenparallel is, en dus dat S het midden is van $[AM]$, zoals gewenst.

2. Beschouw de getallen $b_i := a_i + i$, en zij c_i de rest van b_i bij deling door $2n$. Stel dat alle c_i verschillend zijn. Dan komen de getallen $0, 1, \ldots, 2n-1$ allemaal precies één keer voor als c_i (want er zijn $2n$ verschillende $c_i \in \{0, 1, \ldots, 2n-1\}$), en dus is de rest bij deling door $2n$ van $c_1 + c_2 + \ldots + c_{2n}$ gelijk aan de rest van $0 + 1 + 2 + \ldots + (2n-1) = n(2n-1)$ bij deling door $2n$. Deze rest is duidelijk gelijk aan $n(2n-1) - 2n \cdot (n-1) = n$. Maar de rest bij deling door $2n$ van $c_i + c_2 + \ldots + c_{2n}$ is gelijk aan de rest bij deling door $2n$ van $b_1 + \ldots + b_{2n} = a_1 + \ldots + a_{2n} + 1 + 2 + \ldots + 2n = 2\cdot(1 + \ldots + 2n) = 2n(2n+1)$ (want c_i is gewoon de rest bij deling van b_i door $2n$), en deze is duidelijk gelijk aan 0. Dit levert een contradictie met het feit dat we daarnet rest n uitkwamen. Dus niet alle c_i zijn gelijk, en in het bijzonder bestaan er $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ zodat $c_i = c_j$. Hieruit volgt dat $b_i - b_j = (a_i - a_j) + (i - j)$ rest $c_i - c_j = 0$ heeft bij deling door $2n$ en dus deelbaar is door $2n$.

3. Stel dat n een natuurlijk getal is dat aan de opgave voldoet. Dan is $2n+1 = a^2$ en $3n+1 = b^2$ voor zekere natuurlijke getallen a en b. Dan moet $5n+3 = 4(2n+1) - (3n+1) = 4a^2 - b^2 = (2a+b)(2a-b)$ een priemgetal zijn. Aangezien $2a+b \geq 2+1 = 3$, volgt er dat $2a-b = 1$. Maar dan is $5n+3 = 2a+b = 2b+1$ en dus $(b-1)^2 = b^2 - 2b + 1 = 3n + 1 - (5n+2) + 1 = -2n < 0$, een contradictie. Er bestaat dus geen n die aan de opgave voldoet.

4. Merk op dat
$$a^3b + b^3c + c^3a - abc(a+b+c) = ab(a-c)^2 + bc(b-a)^2 + ca(c-b)^2 \geq 0.$$
Een alternatieve oplossing wordt gegeven door de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz:
$$\begin{aligned} a^2b^2c^2(a+b+c)^2 &= \left(\sqrt{a^3b}\sqrt{abc^2} + \sqrt{b^3c}\sqrt{a^2bc} + \sqrt{c^3a}\sqrt{ab^2c}\right)^2 \\ &= abc(a+b+c)(a^3b + b^3c + c^3a), \end{aligned}$$
waar het te bewijzen meteen uit volgt.

5. Zij D het punt zodat $ABDN$ een parallellogram is. Omdat $|CN| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|AB| = |MN|$ (want MN is middenparallel), is ΔCMN gelijkbenig met top in N. Er volgt dat NO de middelloodlijn is van $[CM]$ (want N ligt erop omdat de driehoek gelijkbenig is, en O ligt erop als middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔCMN), en dus meteen ook de bissectrice van $\widehat{CNM}$ (want de driehoek is gelijkbenig). In de gelijkbenige driehoek ΔCNO volgt er nu dat $\widehat{ACO} = \widehat{NCO} = \widehat{CNO} = \widehat{MNO} = \widehat{DNO}$. We weten ook dat $|CO| = |NO|$ (dit is de straal van de omgeschreven cirkel van ΔCMN), en dat $|AC| = |AB| = |DN|$ (want $ABDN$ is een parallellogram). Er volgt dat ΔACO en ΔDNO congruent zijn, en dus $|AO| = |DO|$. Merk nu tenslotte op dat K, als midden van de diagonaal BN in het parallellogram $ABDN$ ook het midden is van de diagonaal AD, en dus staat OK als zwaartelijn in de gelijkbenige driehoek ΔADO loodrecht op AD, en dus ook op AK.