Beginnerscompetitie
Augustus 2009

1. Zij ΔABC een driehoek en M het midden van $[BC]$. Beschouw het punt P op $[CA]$ zodat $|CP| = 2|AP|$. Bewijs dat BP door het midden van $[AM]$ gaat.

2. Zij $n \in \mathbb{N}$. We beschouwen een rij $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ van $2n$ verschillende getallen uit $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Bewijs dat er getallen $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ bestaan zodat $(a_i - a_j) + (i - j)$ deelbaar is door $2n$.

3. Bestaat er een natuurlijk getal $n > 0$ zodat $2n + 1$ en $3n + 1$ volkomen kwadraten zijn, en $5n + 3$ een priemgetal is? (Een *volkomen kwadraat* is het kwadraat van een natuurlijk getal.)

4. Toon aan dat voor getallen $a, b, c \geq 0$ geldt dat
$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a.$$

5. Beschouw in een gelijkbenige driehoek ΔABC (met $AB = AC$) de middens M en N van $[BC]$ en $[CA]$, respectievelijk, en het middelpunt O van de omgeschreven cirkel van ΔCMN. Bewijs dat als K het midden is van $[BN]$, dan staan AK en KO loodrecht op elkaar.