Beginnerscompetitie
Juli 2009
Oplossingen

1. Noem de getallen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 en a_6, zodat a_1 en a_4 tegenover elkaar staan, en analoog voor a_2 en a_5, en a_3 en a_6. Er is gegeven dat

$$\begin{aligned}1001 &= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_6 + a_1a_5a_3 + a_1a_5a_6 + a_4a_2a_3 + a_4a_2a_6 + a_4a_5a_3 + a_4a_5a_6 \\ &= (a_1 + a_4)(a_2 + a_5)(a_3 + a_6).\end{aligned}$$

Omdat $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ en alle getallen in bovenstaand product strikt groter dan 1 zijn, vinden we dat $a_1 + a_4$, $a_2 + a_5$ en $a_3 + a_6$ op een permutatie na gelijk zijn aan 7, 11 en 13. We vinden dus in elk geval dat $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 31$.

2. Zij P het snijpunt van AB en CD, Q het snijpunt van CD en EF en R het snijpunt van EF en AB. Omdat alle hoeken van de zeshoek gelijk zijn, zijn ze allemaal $4 \cdot 180°/6 = 120°$ groot, en dus is $\widehat{PBC} = \widehat{PCB} = 60°$. Er volgt dat ΔBCP gelijkzijdig is, en dus $|BP| = |CP| = |BC|$. Analoog is $|DQ| = |EQ| = |DE|$ en $|FR| = |AR| = |AF|$. Ook vinden we nu dat $\widehat{PQR} = \widehat{QRP} = \widehat{RPQ} = 60°$, en dus is ΔPQR gelijkzijdig. We vinden dus dat

$$\begin{aligned}|BC| + |AB| + |AF| &= |PB| + |BA| + |AR| = |PR| = |PQ| \\ &= |PC| + |CD| + |DQ| = |BC| + |CD| + |DE|,\end{aligned}$$

en dus

$$|DE| - |AF| = |AB| - |CD| > 0,$$

zoals gewenst.

3. (a) Aangezien $a, b, c > 0$ mogen we beide leden delen door $(a+b)c$, en wordt de ongelijkheid equivalent met

$$a^2 - ab + b^2 \geq \frac{(a+b)}{(a+b)c} = \frac{1}{c} = ab,$$

hetgeen equivalent is met $(a-b)^2 \geq 0$. (Merk dus op dat we ook gewoon via AM-GM konden zeggen dat $c(a^3+b^3) = c(a+b)(a^2-ab+b^2) \geq c(a+b)(2ab-ab) = a+b$.)

(b) Noteer $x = a^{2009/3}$, $y = b^{2009/3}$ en $z = c^{2009/3}$. Dan is

$$\frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + 1} = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} = \frac{z}{z(x^3+y^3) + z}.$$

Omdat $abc = 1$, is $xyz = 1$ en dus zegt (a) ons dat $z(x^3 + y^3) \geq x + y$. Er volgt dat

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + 1} + \frac{1}{b^{2009} + c^{2009} + 1} + \frac{1}{c^{2009} + a^{2009} + 1} \\ &= \frac{z}{z(x^3+y^3)+z} + \frac{x}{x(y^3+z^3)+x} + \frac{y}{y(z^3+x^3)+y} \\ &\leq \frac{z}{x+y+z} + \frac{x}{y+z+x} + \frac{y}{z+x+y} = 1.\end{aligned}$$

Alternatieve oplossing. Noteer $p = a^{2009}$, $q = b^{2009}$ en $r = c^{2009}$. Dan is de ongelijkheid equivalent met

$$\frac{2 + 2q + r + p}{(p+q+1)(q+r+1)} = \frac{1}{p+q+1} + \frac{1}{q+r+1} \leq 1 - \frac{1}{r+p+1} = \frac{p+r}{p+r+1},$$

en dus volstaat het te bewijzen dat $(2+2q+r+p)(p+r+1) \leq (p+r)(p+q+1)(q+r+1)$. Na uitwerking blijkt dit equivalent met

$$2(p+q+r) \leq p^2q + p^2r + q^2p + q^2r + r^2p + r^2q.$$

Er zijn nu verschillende manieren om het af te maken. De eenvoudigste is rechtstreeks via de ongelijkheid van Muirhead op $(2,1,0) \succ (5/3, 2/3, 2/3)$. Een iets elementairdere manier is via AM-GM:

$$p^2q + p^2q + p^2r + p^2r + q^2p + r^2p \geq 6\sqrt[6]{p^{10}q^4r^4} = 6p,$$

en analoog

$$2(q^2r + q^2p) + p^2q + r^2q \geq 6q, \quad 2(r^2p + r^2q) + p^2r + q^2r \geq 6r.$$

Deze drie ongelijkheden optellen, levert het gevraagde.

4. Merk op dat ΔAPQ en ΔBPR gelijkvormig zijn omdat hun hoeken gelijk zijn, en dus is

$$\frac{|PR|}{|PQ|} = \frac{|BP|}{|AP|} = \frac{|BP| + |AP|}{|AP|} - 1 = \frac{|AB|}{|AP|} - 1.$$

5. We bekijken eerst het geval waarin 0 niet in de verzameling zit. Zij m het kleinste getal van A en M het grootste. (Dit laatste bestaat omdat A eindig is, en $0 < m < M$ omdat A minstens twee elementen bevat.) Omdat $m^2/(M-m)$ in A zit, is $m^2/(M-m) \geq m$ en dus $2m \geq M$. Zij a het op één na grootste element in A. Omdat uit $a^2/(M-a) = M$ volgt dat $M = \frac{1}{2}a\left(1 \pm \sqrt{5}\right)$, is dit geval absurd (want $A \subset \mathbb{N}$). Maar $a^2/(M-a)$ zit in A, dus volgt er dat $a^2/(M-a) < M$ en dus $a^2/(M-a) \leq a$. Bijgevolg is (want $0 < a$) $2a \leq M \leq 2m$. Omdat m het minimum van A is, volgt nu eenvoudig dat $m = a$, en dus is het op één na grootste element van A het minimum van A. De conclusie is dat A maar twee elementen bevat. Omdat $m^2/(M-m) = M$ onmogelijk is (zie hierboven), moet $m^2/(M-m) = m$, en dus $M = 2m$. We vinden de verzamelingen $\{m, 2m\}$ met m een willekeurig natuurlijk getal, verschillend van 0.
Stel nu dat $0 \in A$. Dan moet $A \setminus \{0\}$ ook aan voorwaarde uit de opgave voldoen: voor alle $a, b \in A \setminus \{0\}$ met $a > b$ moet $b^2/(a-b) \in A$ en omdat $b \neq 0$, moet dit dus in $A \setminus \{0\}$ zitten. We vinden dus nog de extra oplossingen $\{0, m, 2m\}$ met m een willekeurig natuurlijk getal, verschillend van 0.