Beginnerscompetitie
Juli 2009

1. We schrijven op elk vlak van een kubus een natuurlijk getal verschillend van nul. (Dit mogen allemaal verschillende getallen zijn.) In elk hoekpunt berekenen we het product van de getallen die op de drie zijvlakken staan die in dat hoekpunt tesamen komen. De som van al deze producten is gelijk aan 1001. Bepaal de som van de getallen op de zijvlakken.

2. Beschouw een zeshoek $ABCDEF$ waarin alle hoeken $120°$ groot zijn en zodat $|AB| > |CD|$. Bewijs dat $|DE| > |AF|$.

3. Stel dat a, b en c positieve reële getallen zijn waarvoor geldt dat $abc = 1$.

   (a) Bewijs dat
   $$c(a^3 + b^3) \geq a + b.$$

   (b) Bewijs dat
   $$\frac{1}{a^{2009} + b^{2009} + 1} + \frac{1}{b^{2009} + c^{2009} + 1} + \frac{1}{c^{2009} + a^{2009} + 1} \leq 1.$$

4. Beschouw een punt P op de zijde $[AB]$ van een rechthoek $ABCD$. Zij Q en R de loodrechte projecties van P op AC en BD, resp. Bewijs dat
   $$\frac{|AB|}{|AP|} - \frac{|PR|}{|PQ|} = 1.$$

5. Vind alle eindige verzamelingen A van natuurlijke getallen met minstens twee elementen en zodat voor alle $a, b \in A$, met $a > b$, geldt dat $\frac{b^2}{a - b}$ ook in A zit.