

Beginnerscompetitie

Juni 2009

Oplossingen

1. We noteren in deze opgave $d(X, l)$ als de afstand van het punt X tot de rechte l . Omdat AA' en BB' loodrecht staan op CM , zijn deze rechten evenwijdig. Omdat M het midden is van $[AB]$, is $\frac{1}{2}|AM|d(C, AM) = \frac{1}{2}|BM|d(C, BM)$, en dus hebben $\triangle ACM$ en $\triangle BCM$ dezelfde oppervlakte. Als we nu CM als basis van deze driehoeken beschouwen, dan volgt hieruit dat $\frac{1}{2}|CM|d(A, CM) = \frac{1}{2}|CM|d(B, CM)$, en dus $|AA'| = d(A, CM) = d(B, CM) = |BB'|$. Samen met de evenwijdigheid van AA' en BB' volgt hieruit dat $AA'BB'$ een parallellogram is, en dus zijn AB' en $A'B$ inderdaad evenwijdig.

Alternatieve oplossing. De clou van de oplossing is uiteraard te bewijzen dat $AA'BB'$ een parallellogram is. De meeste deelnemers bewezen dit (correct) door op te merken dat driehoeken $\triangle AA'M$ en $\triangle BB'M$ congruent zijn omdat hun hoeken gelijk zijn en $|AM| = |BM|$. Bijgevolg is $|A'M| = |B'M|$, en dus snijden de diagonalen van de vierhoek $AA'BB'$ elkaar middendoor, waaruit volgt dat dit inderdaad een parallellogram is.

2. We maken er een algemeen probleem van. Noteer $A_n = \{1, 2, \dots, n\}$, noem een deelverzameling van A_n met de gevraagde eigenschappen *goed*, en zij a_n het aantal goede deelverzamelingen van A_n . Uiteraard is $a_1 = a_2 = 0$. We kijken nu naar a_n voor $n \geq 2$. Neem een goede deelverzameling A van A_n en noteer $B = A \cap A_{n-1}$ (dus de getallen in A die strikt kleiner dan n zijn). Als $n \notin A$, dan moet $A = B \subset A_{n-1}$ een goede deelverzameling van A_{n-1} zijn, en dit kan op a_{n-1} manieren. Als $n \in A$, dan is $n-1 \notin A$. Dus, ofwel is $B = \{k\}$ voor een bepaalde $k = 1, 2, \dots, n-2$, ofwel is $B \subset A_{n-2}$ een goede deelverzameling van A_{n-2} . Er zijn dus $n-2 + a_{n-2}$ mogelijkheden voor A als $n \in A$, en in totaal geeft dit

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + (n-2).$$

We vinden nu achtereenvolgens $a_3 = a_2 + a_1 + 1 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 7$, $a_6 = 14$, $a_7 = 26$, $a_8 = 46$, $a_9 = 79$, $a_{10} = 133$. Het antwoord is dus 133.

3. Merk op dat $\beta = P(0)$ als de coëfficiënt bij de constante term een geheel getal is. Nu geldt er dat $P(\alpha) = 0$, en dus $0 = P(P(P(\alpha))) = P(P(0)) = P(\beta)$. Ook is $P(P(P(\beta))) = P(P(0)) = P(\beta) = 0$. Dit getal β voldoet dus aan de opgave.
4. Stel dat p , q en r priemgetallen zijn zodat p een deler is van $qr - 1$, q een deler is van $rp - 1$ en r een deler is van $pq - 1$. Er volgt dat pqr een deler is van

$$\begin{aligned}(qr - 1)(rp - 1)(pq - 1) &= p^2q^2r^2 - p^2qr - pq^2r - pqr^2 + pq + qr + rp - 1 \\ &= pqr(pqr - p - q - r) + pq + qr + rp - 1.\end{aligned}$$

Bijgevolg deelt pqr ook het getal $pq + qr + rp - 1$, en dus moet

$$\frac{pq + qr + rp - 1}{pqr} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{pqr} > 0$$

een natuurlijk getal zijn. Verder geldt er dat p , q en r verschillende priemgetallen zijn. Immers, als bijvoorbeeld $p = q$, dan zou p een deler zijn van $qr - 1 = pr - 1$, en dus ook van 1, hetgeen absurd is. Als het maximum van p , q en r strikt groter is dan 5, dan kan

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - \frac{1}{pqr} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - 0 = \frac{41}{42}$$

nooit een natuurlijk getal zijn. Er volgt dat p , q en r de priemgetallen 2, 3 en 5 zijn, in een willekeurige volgorde. Dit geeft (na controle) inderdaad de 6 oplossingen $(2, 3, 5)$, $(3, 5, 2)$, $(5, 2, 3)$, $(2, 5, 3)$, $(5, 3, 2)$ en $(3, 2, 5)$.

5. Noteer $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \alpha$, $\widehat{FDB} = \widehat{EDC} = \beta$ en $\widehat{DEC} = \widehat{FEA} = \gamma$. In driehoek $\triangle DEF$ geldt $180^\circ = (180^\circ - 2\alpha) + (180^\circ - 2\beta) + (180^\circ - 2\gamma)$, en dus $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. In driehoek $\triangle AEF$ vinden we dan $\widehat{ACB} = \widehat{ECD} = 180^\circ - \beta - \gamma = \alpha$. Analoog is $\widehat{BAC} = \beta$ en $\widehat{ABC} = \gamma$. Beschouw nu het snijpunt I van de bissectrices van driehoek $\triangle DEF$. We vinden dan $180^\circ = \widehat{BDC} = \widehat{BDF} + 2\widehat{FDI} + \widehat{EDC} = 2(\widehat{FDI} + \widehat{BDF}) = 2\widehat{BDI}$, den dus is $DI \perp BC$. Analoog is $EI \perp AC$ en $FI \perp AB$. Nu is $\widehat{AIE} = \widehat{AFE} = \alpha$ (in de koordenvierhoek $AFIE$), en dus is $\widehat{AID} = \widehat{AIE} + \widehat{EID} = \alpha + (360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \widehat{ECD}) = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$, en dus ligt A op ID . Er volgt dat $AD \perp BC$.

Alternatieve oplossing. (Naar Wouter van de Vijver.) We hebben hierboven aangetoond dat $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ en $\widehat{AEF} = \widehat{ABC}$. Bijgevolg zijn $\triangle ABC$ en $\triangle AEF$ gelijkvormig. Noteer $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $|BD| = d$, $|CE| = e$ en $|AF| = f$. Dan volgt uit deze gelijkvormigheid dat $(b - e)/f = |AE|/|AF| = |AB|/|AC| = c/b$, en dus $b^2 - be = cf$. Analoog vinden we $a^2 - ad = be$ en $c^2 - cf = ad$. Bijgevolg is

$$\begin{aligned} 0 &= (a^2 - ad - be) + (c^2 - cf - ad) - (b^2 - be - cf) = a^2 + c^2 - b^2 - 2ad \\ &= 2ac \cos(\widehat{ABC}) - 2ad, \end{aligned}$$

en dus $\cos(\widehat{ABC}) = d/c = |BD|/|BA|$. Er volgt dat $\triangle ABD$ rechthoekig is met rechte hoek in D , zoals gewenst.