

Beginnerscompetitie

Mei 2009

Oplossingen

1. (*Oplossing naar Stijn Cambie.*)

Men gaat eenvoudig na dat aan de opgave voldaan is als $p = q$. We bewijzen dat dit de enige priemgetallen zijn. Stel immers dat $p < q$. Dan is $p+q$ een deler van $p^2+q^2 = p(p+q)+q(q-p)$ en dus een deler van $q(q-p)$. Omdat $\text{ggd}(q, q-p) = \text{ggd}(q, q-(q-p)) = \text{ggd}(q, p) = 1$ (want $p \neq q$ zijn twee verschillende priemgetallen), volgt hieruit dat $p+q$ een deler is van $q-p$, en dus $p+q \leq q-p$, hetgeen absurd is. Bijgevolg kan het niet zijn dat $p < q$. Analoog kan het niet dat $p > q$, en dus moet $p = q$, zoals we wouden bewijzen.

2. Noteer $|AS| = a$, $|BS| = b$, $|CS| = c$ en $|DS| = d$. De stelling van Pythagoras toepassen in de rechthoekige driehoeken $\triangle ACS$, $\triangle BDS$, $\triangle BCS$ en $\triangle ADS$ geeft $|AC|^2 = a^2 + c^2$, $|BD|^2 = b^2 + d^2$, $|BC|^2 = b^2 + c^2$ en $|AD|^2 = a^2 + d^2$, respectievelijk. Nu geldt er dus dat

$$\begin{aligned} |AC|^2|BD|^2 - |AD|^2|BC|^2 &= (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (a^2 + d^2)(b^2 + c^2) \\ &= a^2d^2 + b^2c^2 - a^2c^2 - b^2d^2 = (b^2 - a^2)(c^2 - d^2) \\ &= (b - a)(b + a)(c - d)(c + d) \geq 0, \end{aligned}$$

aangezien $b = |BS| \geq |AS| = a$ en $c \geq d$. Bijgevolg is $|AC| \cdot |BD| \geq |AD| \cdot |BC|$.

3. Nee. Omdat \mathcal{M} en \mathcal{N} niet-leeg zijn (en 0 niet bevatten), bestaan er natuurlijke getallen p_1, p_2, q_1, q_2 verschillend van 0 zodat $p_1/q_1 \in \mathcal{M}$ en $p_2/q_2 \in \mathcal{N}$. Als we nu $p_2q_1 \neq 0$ keer p_1/q_1 bij zichzelf optellen, dan moet dit nog altijd in \mathcal{M} zitten, dus $p_2q_1 \cdot (p_1/q_1) = p_1p_2 \in \mathcal{M}$ en analoog $p_1p_2 \in \mathcal{N}$. Dus \mathcal{M} en \mathcal{N} zijn niet disjunct.
4. Merk op dat $p = a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$, waarbij de tweede factor duidelijk groter is dan 1. Omdat p priem is, volgt hier dan uit dat $a - b = 1$, (Want anders zou p twee factoren groter dan 1 bevatten.) en dus

$$\begin{aligned} 4p + 1 &= 4(a^5 - b^5) + 1 = 4((b+1)^5 - b^5) + 1 = 4(5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1) + 1 \\ &= 5(4b^4 + 8b^3 + 8b^2 + 4b + 1) = 5(2b^2 + 2b + 1)^2. \end{aligned}$$

Omdat $\sqrt{5}$ irrationaal is, volgt hieruit dat $4p + 1$ geen volkomen kwadraat is.

5. Zij D het punt op BC zodat C het midden is van $[BD]$. Dan is AC een zwaartelijn in driehoek $\triangle ABD$. Aangezien $|AC|/|LC| = |AC|/|BC| = 3$, volgt hieruit dat L het zwaartepunt van driehoek $\triangle ABD$ is. Aangezien $|CD| = |CB| = |CL|$, ligt L op de cirkel met diameter $[BD]$ en dus staat BL loodrecht op DL . De conclusie is dat BL loodrecht staat op KL als en slechts als DL en KL evenwijdig zijn en dus samenvallen. Dit is op zijn beurt equivalent met zeggen dat KL de zwaartelijn DL in $\triangle ABD$ is, of nog, dat K het midden van $[AB]$ is.