Beginnerscompetitie

Mei 2009

1. Bepaal (met bewijs) alle priemgetallen p en q zodat $p^2 + q^2$ deelbaar is door $p + q$.

2. Beschouw een rechthoekige driehoek $\triangle BCS$ met rechte hoek in S. Zij A een punt op $[BS]$ en D een punt op $[CS]$. Toon aan dat $|AC| \cdot |BD| \geq |AD| \cdot |BC|$.

3. Beschouw twee disjuncte (niet-lege) verzamelingen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ zodat $\mathcal{M} \cup \mathcal{N} = \mathbb{Q}_0^+$. Is het mogelijk dat $m_1 + m_2 \in \mathcal{M}$ en $n_1 + n_2 \in \mathcal{N}$ voor alle $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ en alle $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$?

4. Stel dat het oneven priemgetal p te schrijven valt als $a^5 - b^5$ voor zekere natuurlijke getallen a en b. Bewijs dat $4p + 1$ geen volkomen kwadraat is.

5. In een driehoek $\triangle ABC$ is $|AC| = 3|BC|$. Zij L het punt op $[AC]$ zo dat $|LC| = |BC|$, en zij K een punt op $[AB]$. Bewijs dat BL loodrecht staat op KL als en slechts als K het midden is van $[AB]$.