Beginnerscompetitie
April 2009
Oplossingen

1. Stel dat het getal met drie cijfers a, b en c *typisch* is, met $a \neq 0$ (want anders heeft het maar 2 cijfers). Dan moet $100a + 10b + c$, het getal zelf, gelijk zijn aan $a + b + c + abc$. Bijgevolg moet $99a + 9b = abc$, of nog,
$$99 + 9\frac{b}{a} = bc.$$
Aangezien b en c cijfers zijn, is $bc \leq 9 \cdot 9 = 81 < 99$, terwijl het linkerlid zeker groter is dan 99. Zo'n cijfers bestaan bijgevolg niet, en dus zijn er geen *typische* getallen met drie cijfers.

2. Beschouw het minimum m en het maximum M van de breuken a_1/b_1, a_2/b_2, $\ldots$, a_n/b_n. Dan is $m = a_i/b_i$ en $M = a_j/b_j$ voor zekere $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Het volstaat dus te bewijzen dat
$$m \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n} \leq M.$$
Omdat m het minimum is van de breuken en M het maximum, geldt er voor elke $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dat $m \leq a_k/b_k \leq M$, en dus $mb_k \leq a_k \leq Mb_k$ (want b_k is positief). Deze ongelijkheden voor $k = 1, 2, \ldots, n$ optellen levert:
$$m(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq M(b_1 + b_2 + \ldots + b_n),$$
waaruit de bewering volgt.

3. Zij M het midden van $[AD]$ en N het midden van $[BC]$. Zij P het midden van $[AC]$. Dan is $|NP| = \frac{1}{2}|AB| = 4$ (want NP is een middenparallel in $\triangle ABC$). Ook MP is een middenparallel, maar dan in $\triangle ACD$, zodat $|MP| = \frac{1}{2}|CD| = 3$. Tenslotte merken we op dat $\triangle MNP$ rechthoekig is in P: omdat CD evenwijdig is met PM en DM evenwijdig is met PN, vormen P, M, D en het snijpunt van PN met CD een parallellogram, zodat $\widehat{MPN} = \widehat{CDM} = 90°$. Volgens de stelling van Pythagoras is de afstand tussen M en N dus gelijk aan
$$|MN| = \sqrt{|MP|^2 + |NP|^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

4. Beschouw een natuurlijk getal n die aan de opgave voldoet. Dan moet $n + 2008$ een deler zijn van $n^2 + 2008$ en $n + 2008$, en dus ook van hun verschil $(n^2 + 2008) - (n + 2008) = n^2 - n$. Analoog moet $n + 2009$ ook een deler zijn van $n^2 - n$. Aangezien $n + 2008$ en $n + 2009$ allebei $n^2 - n$ delen, en deze twee getallen geen gemeenschappelijke deler hebben, moet ook hun product $n^2 - n$ delen: $(n + 2008)(n + 2009)$ deelt $n^2 - n$.
Als $n = 1$, dan is hieraan voldaan, en we gaan eenvoudig na dat $n = 1$ een oplossing is. Als $n > 1$, dan is $n^2 - n > 0$. Ter herinnering: als $a > 0$ een deler is van $b > 0$, dan moet a natuurlijk kleiner zijn dan b. In dit geval wordt dit: $(n + 2008)(n + 2009) \leq n^2 - n$, of nog, $4016n + 2008 \cdot 2009 \leq 0$, hetgeen onmogelijk is als $n > 1$. De conclusie is dat $n = 1$ de enige oplossing is.

5. Het snijpunt van AC en BD noemen we M. Omdat F het midden is van $[BH]$ en PF loodrecht staat op BH, volgt er dat PF de middelloodlijn is van $[BH]$. Bijgevolg is $\triangle BPH$ gelijkbenig met tophoek in P. Het is ook evident dat $|BM| = |CM|$, zodat ook $\triangle BMC$ gelijkbenig is, met tophoek in M. De driehoeken $\triangle BPH$ en $\triangle BMC$ zijn dus allebei gelijkbenig, met dezelfde basishoek $\widehat{PBH} = \widehat{MBC}$. Dus hun tophoeken zijn gelijk: $\widehat{BPH} = \widehat{BMC}$. Hieruit volgt dat AC en PH evenwijdig zijn, zodat de hoogte vanuit P op AC even lang is als de hoogte vanuit H op AC, dus is de oppervlakte van $\triangle AHP$ gelijk aan die van $\triangle CHP$. (Even lange hoogte en dezelfde basis.) Door van beide oppervlakten de oppervlakte van $\triangle PHQ$ af te trekken, vind je dat $\triangle PQA$ en $\triangle HQC$ dezelfde oppervlakte hebben.