

Beginnerscompetitie

April 2009

1. We noemen een getal *typisch* als het gelijk is aan de som van zijn cijfers, vermeerderd met het product van zijn cijfers. Zo is $39 = 3 + 9 + 3 \cdot 9$ *typisch* en $40 \neq 4 + 0 + 4 \cdot 0$ niet. Bepaal alle *typische* natuurlijke getallen met drie cijfers.
2. Beschouw $2n$ strikt positieve reële getallen $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$. Bewijs dat er getallen i en j uit $\{1, 2, \dots, n\}$ bestaan zodat

$$\frac{a_i}{b_i} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \leq \frac{a_j}{b_j}.$$

3. Beschouw de driehoek $\triangle ABC$ en het punt D op $[AB]$ zodat CD loodrecht staat op AB . Bepaal de afstand tussen de middens van $[AD]$ en $[BC]$ als $|AB| = 6$ en $|CD| = 8$.
4. Vind alle natuurlijke getallen n zodat $n + 2008$ een deler is van $n^2 + 2008$ en tegelijk ook $n + 2009$ een deler is van $n^2 + 2009$.
5. In de rechthoek $ABCD$ is P een willekeurig punt op diagonaal BD . Het voetpunt van de loodlijn uit P op BC noemen we F en het punt H ligt op BC zodat $|BF| = |FH|$. Het snijpunt van AH en CP noemen we Q .
Bewijs dat de driehoeken $\triangle APQ$ en $\triangle CHQ$ dezelfde oppervlakte hebben.