

Beginnerscompetitie

Juni 2008

Oplossingen

1. $n^3 + n = n(n^2 + 1)$ is steeds even. (Omwille van de factor n als n even is, en de factor $n^2 + 1$ als n oneven is.) Analoog is $m^5 + m + 1$ altijd oneven. Als de vergelijking een oplossing zou hebben, dan zou er een getal zijn dat zowel even als oneven is, en dat is een contradictie.
2. Stel dat het minimum van de leeftijden gelijk is aan m . We tonen aan dat alle kinderen m jaar oud is. Immers, aangezien dit het minimum is, is er een kind met leeftijd m . Beschouw zijn twee burens, met leeftijd m_l en m_r . Dan is $m = (m_r + m_l)/2$. Maar $m_l, m_r \geq m$, dus als één van de twee burens strikt ouder zou zijn, zou $m = (m_r + m_l)/2 > (m + m)/2 = m$, en dat is een contradictie.

De twee burens van het jongste kind zijn dus m jaar oud. Beschouw nu het kind rechts van het eerste kind. Dezelfde methode levert op dat het kind rechts hiervan ook m jaar oud is, en zo kunnen we de hele cirkel rond gaan.

3. $\triangle BCD$ is per constructie gelijkbenig, dus $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$. Omdat BI de (binnen-)bissectrice is van \widehat{ABC} , is $\widehat{ABI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Er volgt dat

$$\widehat{ABI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{CBD}) = \frac{1}{2}(\widehat{BCD} + \widehat{BDC}) = \widehat{BDC} = \widehat{ADC}.$$

Aangezien A, B en D op één rechte liggen en omdat C en I aan dezelfde kant van AB liggen, betekent dit dat BI en CD evenwijdig zijn. Analoog zijn CI en BE evenwijdig. Bijgevolg is $CIBH$ een parallellogram, en dus is $|BI| = |CH|$.

4. Merk op dat

$$ad + bc = ad + b(c - a) + ab = (a - c)d + b(c - a) + ab + cd = (a - c)(d - b) + (ab + cd).$$

Als $a - c$ een deler is van $ab + cd$, dan volgt uit deze betrekking natuurlijk meteen dat $a - c$ ook een deler is van $ad + bc$.

5. We geven de daken afwisselend de waarden $+1, -1, +1, -1, \dots$ (Dus dak 1 krijgt waarde $+1$, dak 2 krijgt -1 , \dots , dak 14 krijgt waarde -1 .) We geven elke kat dezelfde waarde als het dak waar hij op zit. In het begin is het product van alle katten -1 .

We gaan nu kijken wat er gebeurt met het product tijdens een beurt. Het teken van een springende kat verandert steeds (ofwel $+1 \rightarrow -1$, ofwel $-1 \rightarrow +1$). Bijgevolg veroorzaakt één springende kat een wisselend teken voor het product. Maar een tweede kat springt ook, en dus gaat het product weer naar zijn oorspronkelijke waarde! Het product blijft dus onveranderd gelijk aan -1 tijdens het hele spring-proces.

Echter, als alle katten na een eindig aantal sprongen op één dak zouden zitten, zou het product gelijk zijn aan $(+1)^{14} = +1$ of $(-1)^{14} = +1$, hetgeen dus onmogelijk is. Ze kunnen dus nooit allemaal op één dak zitten.