Beginnerscompetitie

Mei 2008

Oplossingen

1. Merk op dat de hoeken $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{BAC}\right)$ vastliggen. (Deze gelijkheden volgen uit het feit dat ΔADE gelijkbenig is met tophoek in A.) Bijgevolg zijn voor twee verschillende configuraties (met gelijkbenige driehoeken ΔAD_1E_1 en ΔAD_2E_2) de rechten D_1E_1 en D_2E_2 evenwijdig. Aangezien de zijde BC vastligt, zullen deze rechten ook steeds onder dezelfde hoek snijden, en die hoek is precies gelijk aan $\widehat{DSB}$.

2. Zij $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_{2008}$ 2008 reële getallen die voldoen aan de opgave. Dan is $0 \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_{89} \leq a_{89} + a_{89} + \ldots + a_{89} = 89a_{89}$, zodat $a_n \geq a_{89} \geq 0$ voor alle $n \geq 89$. Er volgt dat

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{89}) + a_{90} + \ldots + a_{2008} \geq 0 + 0 + \ldots + 0 = 0.$$

3. Noteer $|BC| = a$, $|CA| = b$ en $|AB| = c$. Neem X op $[BC]$ zodat $|BX| = \frac{1}{2}(a - b + c))$, Y op $[CA]$ zodat $|CY| = \frac{1}{2}(a + b - c)$ en Z op $[AB]$ zodat $|AZ| = \frac{1}{2}(-a + b + c))$.

   Merk op dat dit steeds mogelijk is: uit de driehoeksongelijkheid volgt dat $0 < \frac{1}{2}(-a+b+c) = |AZ| < c = |AB|$, en analoog voor de andere punten. Verder geldt er dat $|BZ| = |AB| - |AZ| = c - \frac{1}{2}(-a+b+c)) = \frac{1}{2}(a-b+c) = |BX|$, zodat ΔBXZ gelijkbenig is. Analoog gaat men na dat de andere driehoeken gelijkbenig zijn.

4. Stel dat $(x - y)^2 \leq x + y$. Dan is

$$0 \leq \left(x - y + \frac{1}{2}\right)^2 = (x-y)^2 + (x - y) + \frac{1}{4} \leq x + y + (x - y) + \frac{1}{4} = 2x + \frac{1}{4},$$

   dus $8x + 1 \geq 0$. De ongelijkheid $8y + 1 \geq 0$ wordt analoog bewezen.

5. Zij $n \in \mathbb{N}_0$ samengesteld. Dan zijn er natuurlijke getallen $p, q > 1$ zodat $n = pq$. Voor $a = p - 1$, $b = q - 1$ en $c = 1$ geldt nu dat $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, en

$$ab + bc + ca + 1 = b + bc + c + 1 = (b + 1)(c + 1) = pq = n.$$