

Beginnerscompetitie

April 2008

Oplossingen

1. Zij p het aantal vragen. In totaal zijn er $43p$ vragen juist beantwoord. Dit aantal is gelijk aan de som van het aantal door Arne goed beantwoorde vragen, zeg a , en het aantal andere goede antwoorden, $70 \cdot 3$. Er geldt dus dat $43p = a + 210$. Arne kan natuurlijk maximaal p vragen juist beantwoorden, dus $a \leq p$. Bijgevolg is $43p = a + 210 \leq p + 210$, dus $42p \leq 210$, dus $p \leq 5$. Verder is $0 \leq a = 43p - 210$, zodat $p \geq 210/43 > 4$. Uit $4 < p \leq 5$ volgt nu $p = 5$, en dus $a = 43p - 210 = 5$, zodat Arne alle 5 vragen juist heeft beantwoord.

2. Stel dat $\alpha^3 + 4\alpha = 8$. Dan is $\alpha^3 = 8 - 4\alpha$, en dus

$$\begin{aligned}\alpha^7 + 64\alpha^2 &= \alpha \cdot (\alpha^3)^2 + 64\alpha^2 = \alpha \cdot (8 - 4\alpha)^2 + 64\alpha^2 \\ &= 64\alpha - 64\alpha^2 + 16\alpha^3 + 64\alpha^2 = 16(4\alpha + \alpha^3) = 128.\end{aligned}$$

3. Stel $2p + 1 = n^3$, met $n \in \mathbb{N}_0$ en p priem. Dan is $2p = n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$. Hierbij is $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$ oneven (want $n(n + 1)$ is steeds even), zodat $n - 1$ even is. (Anders zou $2p = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ oneven zijn.) Verder geldt dat $n^2 + n + 1 > 1$, dus is $n - 1 = 2p/(n^2 + n + 1) < 2p$. Uit deze observaties volgt dat $n - 1$ een even deler is van $2p$ die kleiner is dan $2p$. Omdat p priem is, zijn $1, 2, p, 2p$ de enige delers van $2p$. Het geval $p = 2$ kunnen we duidelijk uitsluiten (want dan is $2p + 1 = 5$), zodat 2 de enige even deler kleiner dan $2p$ is. Bijgevolg moet $n - 1 = 2$, en dus $n = 3$. Dit levert de enige oplossing $(n, p) = (3, 13)$, dus het priemgetal is inderdaad uniek.

4. Merk op dat

$$\begin{aligned}(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 &= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \\ &= a^2(d^2 + c^2) + b^2(c^2 + d^2) = a^2 + b^2 = 1.\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $(ac + bd)^2 = 1 - (ad - bc)^2 = 1 - 25/169 = 144/169$, dus $ac + bd = 12/13$.

5. Teken de middelloodlijn k van $[BP]$. Zij S het snijpunt van k met $[BC]$. Het is niet moeilijk na te gaan dat S het midden is van $[BC]$: als T het snijpunt is van k en $[BP]$, dan zijn de driehoeken $\triangle BST$ en $\triangle BCP$ gelijkvormig, omdat PC en ST beiden loodrecht staan op BP en omdat ze een gemeenschappelijke hoek hebben. Hieruit volgt dan meteen dat $|BS|/|BC| = |BT|/|BP| = 1/2$.

Omdat $ABCD$ een parallellogram is, zijn $AM \equiv AD$ en $CS \equiv BC$ evenwijdig. Omdat A gaat (want de driehoek is gelijkbenig), en $CM \perp BP$, zijn CM en AS ook evenwijdig. Hieruit volgt dat $ASCM$ ook een parallellogram is. Hieruit volgt dat $|AM| = |CS| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}|AD|$, en dus is M inderdaad het midden van $[AD]$.

