

Beginnerscompetitie

Maart 2008

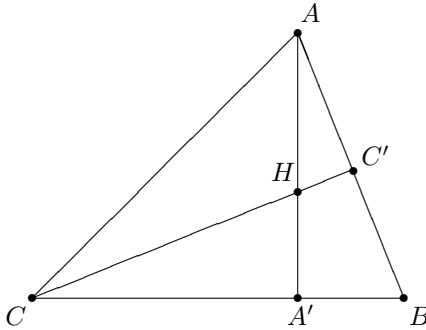
Oplossingen

1. Merk op dat $z^2 = x^2 + y^2 > y^2$, dus $z > y$, want $y, z > 0$. Er geldt dat $x^2 = z^2 - y^2 = (z-y)(z+y)$. Bijgevolg moeten $z-y$ en $z+y$ twee delers zijn van x^2 , waarbij $z+y > z-y > 0$. Maar x is priem, dus x heeft maar 3 positieve delers: 1, x en x^2 . De enige mogelijkheid is dus dat $z+y = x^2$ en $z-y = 1$. Hieruit halen we dat $2y = (z+y) - (z-y) = x^2 - 1$, zodat $\sqrt{2y+1} = x$ inderdaad priem is.
2. Zij A' het voetpunt van A op $[BC]$ en C' het voetpunt van C op $[AB]$. Merk op dat

$$\widehat{HCA'} = \widehat{C'CB} = 90^\circ - \widehat{C'BC} = 90^\circ - \widehat{ABA'} = \widehat{BAA'},$$

waarbij de tweede gelijkheid volgt uit het feit dat $\triangle BCC'$ rechthoekig is in C' en de vierde volgt uit het feit dat $\triangle BAA'$ rechthoekig is in A' .

Nu geldt dus dat $\widehat{HCA'} = \widehat{BAA'}$, $\widehat{HA'C} = 90^\circ = \widehat{BA'A}$ en $|CH| = |AB|$, zodat $\triangle HCA'$ en $\triangle BAA'$ congruent zijn. Bijgevolg is $|CA'| = |AA'|$, zodat $\triangle AA'C$ een gelijkbenige, rechthoekige driehoek is. Hieruit volgt dat $\widehat{BCA} = \widehat{A'CA} = \widehat{A'AC}$, dus $90^\circ = \widehat{A'CA} + \widehat{A'AC} = 2 \cdot \widehat{BCA}$, dus $\widehat{BCA} = 45^\circ$.



3. Merk op dat

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{6} &= \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right) = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

waaruit volgt dat

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4. Zij a_n het aantal manieren om n verschillende getallen $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ te ordenen zoals in de opgave vermeld. Als laatste getal in de ordening moet dan ofwel α_1 , ofwel α_n staan. Immers, als α_i vanachter staat met i niet 1 of n , dan staat zowel $\alpha_1 < \alpha_i$ als $\alpha_n > \alpha_i$ vóór α_i , en dat mag niet, want dan geldt niet voor alle j dat $\alpha_j < \alpha_i$ óf voor alle j dat $\alpha_j > \alpha_i$. De ordening eindigt dus op α_1 of α_n . Als α_1 vanachter staat, dan kunnen we de $n-1$ getallen ervoor precies op a_{n-1} manieren ordenen. Analoog bekomen we a_{n-1} mogelijke ordeningen als α_n vanachter staat. We vinden dus dat steeds geldt dat $a_n = 2a_{n-1}$. Tenslotte merken we op dat $a_1 = 1$, en dus

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = \dots = 2^{n-1} a_1 = 2^{n-1}.$$

5. Voor alle i geldt dat $x_i \in [m, M]$, dus $(x_i - m)(M - x_i) \geq 0$, dus $(m + M)x_i - mM \geq x_i^2$. Dit geldt voor alle i , zodat

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 &\leq ((m + M)x_1 - mM) + \dots + ((m + M)x_n - mM) \\ &= (m + M)(x_1 + \dots + x_n) - nmM = -nmM.\end{aligned}$$