

Beginnerscompetitie

Maart 2008

1. Als x een priemgetal is en $x^2 + y^2 = z^2$ voor zekere $y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, bewijs dan dat $\sqrt{2y+1}$ een priemgetal is.
2. De hoogtelijnen in de scherphoekige driehoek $\triangle ABC$ snijden mekaar in H . Bepaal \widehat{BCA} als er geldt dat $|AB| = |CH|$.
3. Bepaal de waarde van

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

als gegeven is dat

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. De natuurlijke getallen $1, 2, \dots, n$ worden gerangschikt zodat iedere waarde ofwel strikt groter is dan alle vorige waarden, ofwel strikt kleiner is dan alle vorige waarden. (Bijvoorbeeld: $(2, 3, 1)$ voldoet, maar $(3, 1, 2)$ niet.) Op hoeveel manieren kan dit gedaan worden?
5. Zijn x_1, x_2, \dots, x_n reële getallen in een interval $[m, M]$, waarvoor geldt dat $x_1 + \dots + x_n = 0$. Toon aan dat

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq -nmM.$$