Beginnerscompetitie
Februari 2008
Oplossingen

1. Er geldt dat $\pi \bullet \pi = \pi^3 - \pi$, dus $\pi \bullet (\pi \bullet \pi) = \pi \bullet (\pi^3 - \pi) = \pi^3 - (\pi^3 - \pi) = \pi$. Bijgevolg is
$$\pi \bullet (\pi \bullet (\pi \bullet (\pi \bullet \pi))) = \pi \bullet (\pi \bullet \pi) = \pi.$$

2. We merken op dat $(p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 7)$ een oplossing is. We bewijzen dat dit de enige oplossing is. Stel dat de priemgetallen p_1, p_2, p_3 voldoen aan $p_3 - p_2 = p_2 - p_1 = 2$. Dan is $p_2 = p_1 + 2$ en $p_3 = p_2 + 2 = p_1 + 4$. Bijgevolg zoeken we eigenlijk een priemgetal p zodat $p, p + 2$ en $p + 4$ alledrie priemgetallen zijn.

   Merk nu op dat van de getallen p, $p + 2$ en $p + 4$ er steeds één een drievoud is. Immers, p is ofwel een drievoud (dan is p een drievoud), ofwel een drievoud plus 1 (dan is $p + 2$ een drievoud), ofwel een drievoud plus 2 (en dan is $p + 4$ een drievoud). Maar nu is dus één van de *priemgetallen* p, $p + 2$ en $p + 4$ een drievoud, dus moet er één gelijk zijn aan 3!

   - $p = 3$. Dan krijgen we dat $p_1 = 3$, $p_2 = p_1 + 2 = 5$ en $p_3 = p_2 + 2 = 7$ allemaal priem zijn, dus dit is een oplossing.
   - $p + 2 = 3$. Dan is $p = 1$ niet priem.
   - $p + 4 = 3$. Dan is $p = -1$ niet priem.

   $(p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 7)$ is dus de enige oplossing.

   Alternatieve oplossing. We gaan na dat voor $p_1 < 5$ enkel $(p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 7)$ voldoet. Stel nu dat er p_1, p_2, p_3 bestaan met $p_1 \geq 5$. Omdat p_1 priem is, bestaat er dan een $n \in \mathbb{N}_0$ zodat $p_1 = 6n-1$ of $p_1 = 6n+1$. (Ga dit na!) In het eerste geval is $p_3 = p_1+4 = 6n+3$ een drievoud groter dan 3 (want $n > 0$) en dus niet priem, en in het andere geval is $p_2 = p_1 + 2 = 6n + 3$ een drievoud groter dan 3 en dus niet priem. Er zijn dus geen oplossingen voor $p_1 \geq 5$, en dus zijn we klaar.

3. Omdat PQ evenwijdig is met BC, geldt volgens de stelling van Thales dat $|AB|/|AP| = |BC|/|PQ|$. Stel dat ΔAPQ oppervlakte S heeft. Dan heeft ΔABC (als som van ΔAPQ en het trapezium $PBCQ$) oppervlakte $S + 3S = 4S$. We weten dus dat $S = \frac{1}{2}|AP| \cdot |PQ|$ (immers, PQ is evenwijdig met BC, dus $\widehat{APQ} = \widehat{ABC} = 90°$) en $4S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC|$. Bijgevolg geldt
$$4 = \frac{4S}{S} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot |BC|}{\frac{1}{2}|AP| \cdot |PQ|} = \frac{|AB|}{|AP|} \cdot \frac{|BC|}{|PQ|} = \left(\frac{|AB|}{|AP|}\right)^2.$$
   Hieruit volgt meteen dat $|AB| = 2|AP|$, zodat P het midden van $[AB]$ is, zoals gevraagd.

4. Stel dat a en b reële getallen zijn zodat $ab = a - b$. Dan is
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2}{ab} - ab = \frac{a^2 + b^2 - (ab)^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2 - (a - b)^2}{ab}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2)}{ab} = \frac{2ab}{ab} = 2.$$
   Er is dus slechts één mogelijke waarde van de gegeven uitdrukking: 2.

   Opmerking. Men zou ook uit $ab = a - b$ kunnen halen dat $(a + 1)b = a$, zodat $b = a/(a + 1)$. Dit invullen in de uitdrukking geeft hetzelfde resultaat.

5. Omdat $[AD]$ de zwaartelijn uit de tophoek van een gelijkbenige driehoek is, is $AD \perp BC$, dus AD is de middelloodlijn van $[BC]$. Omdat $P \in [AD]$, is dus $BP = CP = QP$. Bijgevolg is P het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔBCQ.

   Nu is $\widehat{ABC} = \widehat{QBC} = \frac{1}{2}\widehat{QPC}$ (omtrekshoek-middelpuntshoek), zodat $\widehat{BAC} = 180° - 2\widehat{ABC} = 180° - \widehat{QPC}$. Tenslotte is ΔCPQ gelijkbenig (want $CP = PQ$), dus $\widehat{QPC} = 180° - 2\widehat{CQP}$, zodat $\widehat{BAC} = 180° - \widehat{QPC} = 2\widehat{CPQ}$.

   Opmerking. Men kan ook werken zonder de kennis van omtrekshoeken en middelpuntshoeken: noem $u = \widehat{PQC} = \widehat{PQC}$, $v = \widehat{PCB} = \widehat{PBC}$ en $w = \widehat{PBQ} = \widehat{PQB}$. De som van de hoeken in ΔBCQ is dan $180° = 2u + 2v + 2w$, zodat $v + w = 90° - u$. Bijgevolg geldt dan $\widehat{BAC} = 180° - 2\widehat{ABC} = 180° - 2(v + w) = 2u = 2\widehat{CQP}$.

   Merk trouwens op dat hieruit volgt dat A, C, P en Q op één cirkel liggen!