Beginnerscompetitie
Februari 2007
Oplossingen

1. Omdat ΔABE gelijkzijdig is, kunnen we twee observaties maken: $\angle AEB = \angle ABE = \angle BAE = 60°$ en $AE = BE = AB = BC = CD = DA$. Uit de eerste observatie volgt er dat $\angle DAE = \angle DAB - \angle BAE = 90° - 60° = 30°$ en uit de tweede observatie volgt er dat ΔADE gelijkbenig is. Bijgevolg is $\angle AED = \frac{1}{2}(180° - \angle DAE) = 75°$. Analoog geldt er dat $BEC = 75°$, dus is $\angle CED = 360° - (\angle DEA + \angle AEB + \angle BEC) = 150°$.

2. Beschouw de volgende n deelverzamelingen van $\mathcal{S}$: $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, ..., $\{2n-1, 2n\}$. Omdat we $n + 1$ getallen uit $\mathcal{S}$ kiezen en er n deelverzamelingen genoteerd zijn, bestaat er volgens het duivenhokprincipe minstens één deelverzameling waar beide elementen uit gekozen worden. Bijgevolg weten we dat er minstens twee opeenvolgende getallen gekozen worden. Natuurlijk zijn deze twee getallen relatief priem, hetgeen onze stelling bewijst.

3. Omdat $D \in [AB]$, is $AD + DB = AB$, dus $4AD = 3AD + AD = BD + AD = AB = 2AC$. Hieruit volgt er dat $\frac{AC}{AD} = 2 = \frac{AB}{AC}$. Het is dus niet moeilijk in te zien dat ΔACD gelijkvormig is met $\angle ABC$, waaruit volgt dat $\angle ADC = \angle ACB$. Bijgevolg is $\angle ADC + \angle ABC = \angle ACB + \angle ABC = 180° - \angle BAC = 90°$.

4. Omdat $n - 1$ en $n + 1$ priemgetallen groter dan 3 zijn, zijn zij niet deelbaar door 3. Tussen drie opeenvolgende natuurlijke getallen is er echter steeds eentje dat deelbaar is door 3, dus weten we dat n een drievoud is. Ook geldt er dat $n-1$ en $n+1$ oneven priemgetallen zijn, dus moet n even zijn. Uit deze twee observaties volgt er dat $n = 2 \cdot 3 \cdot k$ met k een natuurlijk getal. Er is echter gegeven dat $n > 6$, dus $k > 1$, dus k bezit minstens één priemfactor. Hieruit volgt dat n het product van minstens drie (niet noodzakelijk verschillende) priemfactoren is.

5. Om de redenering achter volgende oplossing te tonen, schrijven we eventjes $c = 2006$ en $d = 2007$. We zoeken dan een oplossing voor de vergelijking $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+c)(b+d) = ab + ad + bc + cd$. Dan moet

$$\begin{aligned} 0 &= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 - 2ab - 2ad - 2bc - 2cd \\ &= (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) + (d^2 - 2ad + a^2) \\ &= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 + (d-a)^2. \end{aligned}$$

   Maar het rechterlid in deze vergelijking is steeds strikt positief, behalve als $a = b = c = d$, hetgeen onmogelijk is, daar $c = 2006$ en $d = 2007$. Bijgevolg heeft de vergelijking geen oplossingen in $\mathbb{R}$.