

Beginnerscompetitie

Januari 2007

Oplossingen

1. Laten we het aantal natuurlijke getallen berekenen in $[0, 2007]$ die deelbaar zijn door 7 en/of 59. Uiteraard is 0 deelbaar door 7 en 59, dus die mogen we eventjes buiten beschouwing laten vanaf nu. Er zijn 286 veelvoudens van 7 en 34 veelvoudens van 59 in $[1, 2007]$. We zitten dus al aan $1 + 286 + 34 = 321$ veelvoudens van 7 en/of 59. Op die manier tellen we wel de gemeenschappelijke veelvoudens van 7 en 59 dubbel. Daarom moeten we alle veelvoudens van $\text{kgv}(7, 59) = 413$ er weer van aftrekken. Dit zijn er 4. We verkrijgen op die manier 317 getallen. Het gevraagde aantal is nu natuurlijk gelijk aan het aantal natuurlijke getallen in $[0, 2007]$, verminderd met het aantal veelvoudens van 7 en/of 59 in $[0, 2007]$, i.e. $2008 - 317 = 1691$.
2. Als $p + 1$ een volkomen kwadraat is, dan bestaat er een $n \in \mathbb{N}$ waarvoor geldt dat $n^2 = p + 1$. Hieruit volgt dat $p = n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Maar p is een priemgetal, dus moet ofwel $n - 1 = 1$, ofwel $n + 1 = 1$. Het tweede geval is absurd en het eerste geval levert het paar $(p, n) = (3, 2)$ op. Dit is de enige oplossing.
3. (a) Voor $n = 0$ geldt de stelling duidelijk. Veronderstel vanaf nu dat $n \geq 1$. Dan is $n > n - 1 \geq 0$ en $\sqrt{n + 2} > \sqrt{n + 1} > 0$. Vermenigvuldig deze ongelijkheden nu lid aan lid: $a_{n+1} = n\sqrt{n + 2} > (n - 1)\sqrt{n + 1} = a_n$.
(b) Merk op dat $a_8 = 21$ en dus is volgens het (a)-deel

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_7 < a_8 = 21 = a_8 < a_9 < a_{10} < \dots$$

De enige natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat $a_n < 21$, zijn dus $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Er zijn bijgevolg 8 oplossingen.

4. Omdat $KM \parallel AC$, geldt er volgens de stelling van Thales dat $\frac{BM}{BA} = \frac{MK}{AC}$. Aangezien $AB = AC$, volgt hieruit dat $BM = MK$. Analoog toont men aan dat $CN = NK$. Bijgevolg is de omtrek van de vierhoek $AMKN$ gelijk aan

$$AM + MK + KN + NA = AM + BM + CN + NA = AB + AC = 2AB.$$

En dit is natuurlijk iets onveranderlijks.

5. We weten dat $a^2 - b^2 + c^2 = 1 = (-1)^2 = (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$, dus $2bc + 2ca = 2b^2 + 2ab$, i.e. $c(b + a) = b(b + a)$. Hieruit volgt er dat $b = c$ of $b = -a$. Als $b = c$, moet $-1 = a + b - c = a$, dus $2b^3 = b^3 + c^3 = -1 + a^3 = -2$, i.e. $(a, b, c) = (-1, -1, -1)$. Als $b = -a$, moet $-1 = a + b - c = -c$, dus $2b^3 = b^3 - a^3 = -1 - c^3 = -2$, i.e. $(a, b, c) = (1, -1, 1)$. In beide gevallen is $abc = -1$.