

Beginnerscompetitie

Juli 2006

1. Zijn a , b en c reële getallen zodat $a + b + c = 0$. Bewijs dat $ab + bc + ca \leq 0$.
2. Beschouw de vergelijking $m^2 - 2n^2 = -1$, waarbij m en n natuurlijke getallen zijn.
 - (a) Zij (m, n) een oplossing. Bewijs dat $(3m + 4n, 2m + 3n)$ ook een oplossing is.
 - (b) Leid daaruit af dat er oneindig veel natuurlijke getallen k bestaan zodanig dat

$$k^2 + (k + 1)^2$$

het kwadraat van een natuurlijk getal is.

3. Toon aan dat voor alle natuurlijke getallen $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n - 1) \cdot 2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

4. Binnen een gelijkzijdige driehoek ligt een punt waarvoor geldt dat de afstanden van dat punt tot de zijden gelijk zijn aan 1, 2 en 3 respectievelijk. Bepaal de oppervlakte van de driehoek.
5. In één van de recentste theorieën uit de deeltjesfysica is er sprake van drie verschillende soorten deeltjes. Als twee deeltjes van een verschillende soort botsen, dan worden die twee deeltjes “vervangen” door één deeltje van de derde soort. Twee deeltjes van dezelfde soort botsen nooit. Veronderstel dat een experiment begint met eenzelfde aantal deeltjes van elke soort. Bewijs dat het experiment nooit kan eindigen met precies één deeltje.