Beginnerscompetitie
Juni 2006
Oplossingen

1. Eenvoudig rekenwerk geeft dat

$$\binom{a}{k} : \binom{a-1}{k} = \frac{a}{a-k}$$

voor alle a en k, dus het antwoord is

$$\binom{\frac{1}{2}}{2006} : \binom{-\frac{1}{2}}{2006} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 2006} = \frac{1}{1-4012} = -\frac{1}{4011}.$$

2. We krijgen de grootst mogelijke verzameling S door alle getallen van de vorm n, $9n$, $81n$, $\cdots$, waarbij n een natuurlijk getal is dat niet deelbaar is door 3, te behouden en door alle getallen van de vorm $3n$, $27n$, $243n$, $\cdots$ te schrappen. We krijgen zo een verzameling met

$$2006 - \left[\frac{2006}{3}\right] + \left[\frac{2006}{9}\right] - \left[\frac{2006}{27}\right] + \left[\frac{2006}{81}\right] - \left[\frac{2006}{243}\right] + \left[\frac{2006}{729}\right] = 1542$$

elementen. (Hierbij is $[x]$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x.)

3. Het antwoord is ja, want $4 - 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^2$, $97 - 56\sqrt{3} = \left(7 - 4\sqrt{3}\right)^2$ en dus

$$4\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{97 - 56\sqrt{3}} = 4\left(\sqrt{3} - 1\right) + 7 - 4\sqrt{3} = 3.$$

4. Zijn a en b de lengten van de zijden van de rechthoek, met $a < b$. We kunnen eenvoudig inzien dat $b = 31$ en dat $a = 25$. Zij s de lengte van het schuine stuk. Volgens de stelling van Pythagoras geldt er dan dat $s^2 = (31 - c)^2 + (25 - d)^2$ waarbij s, c en d gelijk zijn aan 13, 19 en 20 - maar niet noodzakelijk in die volgorde. Na wat proberen zien we dan dat de enige mogelijkheid gegeven wordt door $s = 13$, $c = 19$ en $d = 20$. Bijgevolg heeft de driehoek die weggesneden werd rechthoekszijden van lengte $31 - 19 = 12$ en $25 - 20 = 5$. De oppervlakte van deze driehoek is 30, dus de oppervlakte van de vijfhoek is $31 \cdot 25 - 30 = 745$.

5. We hebben dat

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-1) - (3ab-1) &= a^2 + 2ab + b^2 - a - b - 3ab + 1 \\ &= a^2 + b^2 + 1 - ab - a - b \\ &= \frac{1}{2}\left((a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2\right) \\ &\geq 0\end{aligned}$$

aangezien kwadraten steeds positief zijn, en daaruit volgt het resultaat.