Beginnerscompetitie
Mei 2006
Oplossingen

1. We kunnen eenvoudig inzien dat het $\frac{1}{2}n(n+1)$-de getal van de rij het laatste getal in de rij is dat gelijk is aan n. (Dat volgt bijvoorbeeld uit het feit dat $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.) Bijgevolg is het 2016-de getal van de rij de laatste term van de rij die gelijk is aan 63. Daaruit volgt natuurlijk dat de 2006-de term van de rij eveneens gelijk is aan 63.

2. Zij v_X de snelheid van Xander als hij stapt en als de roltrap stilstaat, en zij v_R de snelheid van de roltrap. Zij x de afstand die afgelegd moet worden. Dan is $x = v_X \cdot 10 = v_R \cdot 20$. Als de roltrap rolt en als Xander stapt, dan is de totale snelheid van Xander gelijk aan $v = v_X + v_R = 3v_R$. Bijgevolg is de tijd die Xander nodig heeft gelijk aan $t = x/v = x/(3v_R) = 20/3 = 6.66\cdots\ s$.

3. Zijn α, β en γ de hoeken van de driehoek. Omdat $\alpha = 45°$ is $\beta+\gamma = 135°$. Omdat ΔBPC en ΔBQC rechthoekig zijn met schuine zijde BC, geldt er dat $MB = MC = MP = MQ$. Bijgevolg is $\angle BQM = \beta$ en $\angle CPM = \gamma$, dus $\angle BMQ = 180° - 2\beta$, en $\angle CMP = 180° - 2\gamma$. (Deze gelijkheden gelden enkel als ΔABC scherphoekig is. Als de driehoek stomphoekig is, verloopt de redenering analoog.) Bijgevolg hebben we dat
$$\begin{aligned}\angle PMQ &= 180° - \angle BMQ - \angle CMP\\ &= 180° - (180° - 2\beta) - (180° - 2\gamma)\\ &= 2(\beta+\gamma) - 180°\\ &= 2\cdot 135° - 180°\\ &= 90°.\end{aligned}$$

4. Stel eerst dat n deelbaar is door 4. Schrijf $n = 4m$ met $m \in \mathbb{N}_0$ en neem
$$a_{4k+1} = 1,\ a_{4k+2} = -1,\ a_{4k+3} = -1 \text{ en } a_{4k+4} = 1 \text{ voor alle } k \in \{0,1,\cdots,m-1\}.$$
Het is duidelijk dat dan $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$.
Stel nu dat $a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$ waarbij elke $a_i \in \{-1,1\}$. In deze som moeten het aantal termen 1 gelijk zijn aan het aantal termen -1. Bijgevolg komt er een even aantal termen voor in de som. Omdat de som uit n termen bestaat, moet n even zijn. We tonen nu aan dat een even aantal termen in deze som gelijk is aan -1. Immers, stel dat er een oneven aantal termen gelijk was aan -1, dan zou het product
$$P = (a_1a_2)(a_2a_3)\cdots(a_{n-1}a_n)(a_na_1)$$
uit een oneven aantal factoren 1 en een oneven aantal factoren -1 bestaan, en $P = -1$. Echter,
$$P = a_1^2a_2^2\cdots a_n^2 = (\pm1)^2(\pm1)^2\cdots(\pm1)^2 = 1.$$
Dat is een contradictie, dus komt er een even aantal termen -1 voor in de som. Het totaal aantal termen in de som is dus deelbaar door 4, en daaruit volgt het resultaat onmiddellijk.

5. Merk op dat $a \geq 1$, $b \geq 2$ en $c \geq 3$ zodat
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} < 2.$$
Bijgevolg moet
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1.$$
Er kan niet gelden dat $a = 1$. Bijgevolg moet $a \geq 2$. Als $a = 2$, dan moet
$$\frac{2}{b} > \frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{2}$$
zodat $b < 4$. Omdat $2 = a < b$ moet $b = 3$, zodat $c = 6$. Als $a \geq 3$ moet
$$\frac{2}{b} > \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{2}{3}$$
zodat $b < 3$: contradictie, omdat $a < b$. Bijgevolg is de enige oplossing $(a,b,c) = (2,3,6)$.