

Beginnerscompetitie

April 2006

Oplossingen

1. De enige manier is: $2^2 + 10^2 + 13^2 = 4^2 + 7^2 + 8^2 + 12^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 11^2$.
2. Stel $n = k(k+1)(k+2)(k+3)$, met $k \in \mathbb{N}$.

(a) Van de vier opeenvolgende getallen k , $k+1$, $k+2$ en $k+3$ is er minstens één deelbaar door 3. Verder zijn minstens 2 van deze getallen even, en één van deze even getallen is natuurlijk een veelvoud van 4. Bijgevolg is n , het product van deze vier getallen, deelbaar door $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

(b) Merk op dat $n = (k^2 + 3k + 1)^2 - 1$. Bijgevolg kan n geen kwadraat zijn, want de enige kwadaten die 1 verschillen zijn 0 en 1, en $n \neq 0$.

3. Merk op dat

$$(10^n - 1)^2 < 10^{2n} - 10^n < \left(10^n - \frac{1}{2}\right)^2 < 10^{2n} - 10^n + 1 < (10^n)^2.$$

De resultaten van de afrondingen zijn dus $10^n - 1$ en 10^n respectievelijk.

4. Merk op dat $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$, dus moet $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 2006$.

Als $n = 1003^2$ dan is $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} < 2 \cdot 1003 = 2006$.

Als $n = 1003^2 + 1$ dan is $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > 2 \cdot 1003 = 2006$, dus het antwoord is $1003^2 + 1$.

5. Stel $a = |BC|$, $b = |CA|$ en $c = |AB|$. Het is duidelijk dat $c > a$ en $c > b$, dus

$$c^2 = \frac{a}{c} \cdot a^2 + \frac{b}{c} \cdot b^2 < a^2 + b^2.$$

Bijgevolg is $\angle C$ een scherpe hoek ("ongelijkheid" van Pythagoras, maar natuurlijk volgt dit ook uit de cosinusregel). Verder geldt er, omdat $c > a$, dat $\angle A < \angle C < 90^\circ$. Analoog, $\angle B < \angle C$, dus we zijn klaar.

Opmerking. Je kan bewijzen dat $\angle A > 60^\circ$, probeer dat eens!