Beginnerscompetitie
Maart 2006
Oplossingen

1. Zijn a en b de lengten van de zijden van een blad papier, met $a > b$. We weten dat

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

De gezochte verhouding is dus $\sqrt{2}$ (net zoals bij een gewoon blad A4-papier).

2. Er geldt dat

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{2005}{2006!} \\ = \; & \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \cdots + \frac{2006-1}{2006!} \\ = \; & \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{4}{4!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{2006}{2006!} - \frac{1}{2006!}\right) \\ = \; & \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2005!} - \frac{1}{2006!}\right) \\ = \; & 1 - \frac{1}{2006!} \\ < \; & 1. \end{aligned}$$

3. Zij α de kleinste hoek van de driehoek. De grootste hoek is dan 5α en voor de derde hoek β geldt dat $\alpha \leq \beta \leq 5\alpha$. Er geldt dat $5\alpha < 90°$, dus $\alpha < 18°$. Anderzijds geldt er ook dat $180° - 6\alpha = \beta < 90°$, dus $6\alpha > 90°$ en $\alpha > 15°$. Bijgevolg is $\alpha = 16°$ of $\alpha = 17°$. Als $\alpha = 16°$ dan geldt er echter dat $5\alpha = 80°$ en $\beta = 180° - 6\alpha = 84°$, contradictie (want $\beta \leq 5\alpha$). Bijgevolg is $\alpha = 17°$.

4. Als twee getallen in die verzameling een gemeenschappelijke deler hebben, dan deelt die ook hun verschil (en dat is zeker kleiner dan 10). Als er een verzameling bestaat die niet aan de voorwaarde voldoet, dan moet er voor elk paar getallen uit de verzameling gelden dat beide getallen deelbaar zijn door 2, 3, 5 of 7. Het is dus voldoende om aan te tonen dat de verzameling een getal bevat dat niet deelbaar is door 2, 3, 5 of 7. Beschouw de vier getallen uit de verzameling die eindigen op 1, 3, 7 en 9. Deze zijn niet deelbaar door 2 of 5. Ten hoogste 2 van deze getallen kunnen deelbaar zijn door 3 (zie je waarom?) en ten hoogste een van deze getallen kan deelbaar zijn door 7, dus het overblijvende getal is het getal dat we zoeken. Daarmee is de uitspraak bewezen.

5. Zijn P, Q, R, S, T, U de middens van AB, BC, CD, DA, AC, BD respectievelijk. Dan geldt er dat $\ell_1 = PR$, $\ell_2 = QS$ en $\ell_3 = TU$. Omdat P en Q de middens zijn van AB en BC, is PQ een middenparallel in ΔABC is $PQ \parallel AC$ en $PQ = \frac{1}{2}AC$. Analoog geldt er dat $SR \parallel AC$ en $SR = \frac{1}{2}AC$. Bijgevolg is $SR \parallel PQ$ en $SR = PQ$, dus $PQRS$ is een parallellogram. Bijgevolg gaat $\ell_2 = QS$ door het midden van het lijnstuk PR, want de diagonalen van een parallellogram snijden elkaar middendoor. Op analoge wijze tonen we aan dat $PTRU$ eveneens een parallellogram is, dus $\ell_3 = TU$ gaat ook door het midden van PQ. Daaruit volgt het resultaat onmiddellijk.