Beginnerscompetitie
Februari 2006
Oplossingen

1. Uit $AE \perp AB$ en $AB \parallel CD$ volgt dat $AE \perp CD$, en uit $CE \perp BC$ en $BC \parallel AD$ volgt dat $CE \perp AD$. Bijgevolg is E het hoogtepunt van ΔACD, zodat inderdaad $DE \perp AC$.

2. Zij R het aantal rode knikkers en zij B het aantal blauwe knikkers, dan is
$$R-1=\frac{1}{7}\left(R+B-1\right) \quad \text{en} \quad R=\frac{1}{5}\left(R+B-2\right).$$
Het stelsel oplossen geeft $R=4$ en $B=18$, dus er zitten 22 knikkers in de zak.

3. We kunnen de vergelijking herschrijven als $1000=(100a+10b+c)(a+b+c)$. Het is duidelijk dat $0 \leq a+b+c \leq 27$, en $a+b+c$ is een deler van 1000, dus $a+b+c$ behoort tot $\{2,4,5,8,10,20,25\}$. Omdat $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1}{4}=0.25$, $\frac{1}{5}=0.2$, $\frac{1}{8}=0.125$, $\frac{1}{10}=0.1$, $\frac{1}{20}=0.05$ en $\frac{1}{25}=0.04$ is de enige mogelijkheid $a=1$, $b=2$ en $c=5$.

4. Na enig experimenteren wordt het duidelijk dat voor alle n geldt dat
$$3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n=\left(3^n-2^n\right)\left(3^{n+1}+2^{n+1}\right).$$
Als $n=1$ dan is $3^3-2^3-6^1=13$ inderdaad priem. Als $n>1$ dan is $3^n-2^n>1$, dus dan is 3^n-2^n een niet-triviale deler van $3^{2n+1}-2^{2n+1}-6^n$. Bijgevolg is dat getal dan geen priemgetal. De enige waarde van n die voldoet is dus $n=1$.

5. Kies twee willekeurige opeenvolgende termen van de rij, a_{n-1} en a_n ($n \in \mathbb{N}_0$). Dan is
$$\begin{aligned}
a_{n-1}a_n &= \left((n-1)^2+(n-1)+1\right)\left(n^2+n+1\right) \\
&= \left(n^2-n+1\right)\left(n^2+n+1\right) \\
&= \left(n^2+1\right)^2-n^2 \\
&= n^4+n^2+1 \\
&= a_{n^2}.
\end{aligned}$$
Bijgevolg is het product van twee opeenvolgende termen weer een term van de rij.