Beginnerscompetitie
Januari 2006
Oplossingen

1. Merk op dat $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$ de ontbinding van 2006 in priemfactoren is. Omdat 59 een deler is van $n!$ moet $n \geq 59$, want 59 is priem en geen van de getallen $1, 2, \cdots, 58$ is deelbaar door 59. Het is nu duidelijk dat daaruit volgt dat de kleinste waarde van n waarvoor $n!$ deelbaar is door 2006 gelijk is aan 59.

2. Het deel van de massa van de komkommers dat niet uit water bestaat bedraagt 1% van 200 kg, of nog, 2 kg. Na het uitdrogen komt deze massa overeen met $100\% - 98\% = 2\%$ van de totale massa, dus dan wegen de komkommers nog maar 100 kg.

3. De som van de hoeken van een convexe 2006-hoek is $(2006 - 2) \cdot 180° = 2004 \cdot 180°$. Veronderstel nu dat een willekeurige convexe 2006-hoek n scherpe en $2006 - n$ stompe hoeken heeft, dan is de som van de hoeken zeker niet groter dan $n \cdot 90° + (2006 - n) \cdot 180°$. Bijgevolg is $2004 \cdot 180° < n \cdot 90° + (2006 - n) \cdot 180°$. Daaruit volgt dat $n \leq 3$. Het is niet moeilijk om in te zien dat het mogelijk is om een 2006-hoek met 3 scherpe hoeken te construeren, dus het antwoord is 2003.

4. Het is niet moeilijk om in te zien (en om te bewijzen) dat het laatste cijfer van 2^n gelijk is aan $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \cdots$ voor $n = 1, 2, \cdots$. Op analoge wijze kunnen we inzien dat 3^n eindigt op $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \cdots$ en dat 4^n eindigt op $4, 6, 4, 6, \cdots$. Als n rest 1 geeft bij deling door 4 dan eindigt $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ dus op het laatste cijfer van de som $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. In dat geval is de som dus deelbaar door 5. Op analoge wijze kunnen we inzien dat de som deelbaar is door 5 wanneer n rest 2 of 3 geeft bij deling door 4, maar niet wanneer n deelbaar is door 4.

5. Er geldt dat $m(m + 1) = 4n(n + 1)$ of $m^2 + m + 1 = (2n + 1)^2$. Bijgevolg moet $m^2 + m + 1$ een volkomen kwadraat zijn, maar dat is een duidelijke contradictie omdat $m^2 < m^2 + m + 1 < (m + 1)^2$ voor $m > 0$. Er zijn dus geen oplossingen.