

Beginnerscompetitie

November 2005

Oplossingen

1. Door een Venndiagram te tekenen wordt het duidelijk dat er 7 vogels geobserveerd werden en dat elke persoon 4 vogels observeerde. Bijgevolg waren alle vogels die Xander zag geel, en Stijn observeerde nog een gele vogel extra die geen van de andere zag. In totaal werden er dus 5 gele vogels geobserveerd.
2. We kunnen elk natuurlijk getal schrijven in de vorm $10n + k$ met $0 \leq k \leq 9$, en in dat geval heeft het cijfer van de tientallen van k^2 dezelfde pariteit als het cijfer van de tientallen van $(10n + k)^2$, omdat

$$(10n + k)^2 - k^2 = 20n(5n + k)$$

een veelvoud van 20 is. Welnu, er geldt dat

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9, 4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36, 7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81,$$

dus alle kwadraten waarvan het cijfer van de tientallen oneven is zijn de volkomen kwadraten van de vorm $(10n + 4)^2$ of $(10n + 6)^2$ (met $n \in \mathbb{N}$). Tussen 1^2 en 2005^2 tellen we precies $2000/5 + 1 = 401$ kwadraten van die vorm.

3. Zijn a_1, a_2, \dots, a_{21} de gegeven getallen, dan geldt er bijvoorbeeld dat

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{11} \geq a_{12} + \dots + a_{21}$$

en

$$a_1 + a_{12} + \dots + a_{22} \geq a_2 + \dots + a_{11}.$$

Door deze ongelijkheden bij elkaar op te tellen en veel termen te schrappen vinden we dat $a_1 > 0$. Op analoge wijze bewijzen we dat de andere a_i positief zijn.

4. Merk op dat een volkomen kwadraat steeds op 1,4,5,6 of 9 eindigt. Welnu, $1! = 1^2$, $1! + 2! = 3$, $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ en voor $k \geq 5$ eindigt $k!$ op 0, zodat het laatste cijfer van de som

$$1! + 2! + \dots + n!$$

steeds gelijk zal zijn aan 3 (voor $n \geq 5$). Bijgevolg is geen enkel getal van deze vorm een volkomen kwadraat als $n \geq 5$. De oplossingen zijn dus $n = 1$ en $n = 3$.

5. (a) Voor $2 \leq j \leq 2006$ is $2006! + j$ deelbaar door j , omdat $2006!$ deelbaar is door j . Bijgevolg is $2006! + j$ geen priemgetal voor $2 \leq j \leq 2006$.
- (b) Het interval $[1, 2005]$ bevat zeker meer dan 1 priemgetal. We schuiven dit interval nu telkens op om de intervallen $[2, 2006]$, $[3, 2007]$, \dots , $[2006! + 2, 2006! + 2006]$ te bekomen. Telkens als we zo “opschuiven” dan blijft het aantal priemgetallen gelijk, of dan stijgt of daalt het aantal priemgetallen in zo’n interval met 1. Omdat we met meer dan 1 priemgetal begonnen zijn in het interval $[1, 2005]$, en omdat er in het eindinterval $[2006! + 2, 2006! + 2006]$ geen enkel priemgetal zit moeten we “onderweg” ergens een interval tegenkomen dat precies één priemgetal bevat.