Beginnerscompetitie
November 2005
Oplossingen

1. Zijn x, y en z de afmetingen van de balk. We mogen dan veronderstellen dat $xy = 20$, $yz = 24$ en $zx = 30$, zodat het volume van de balk gelijk is aan

$$xyz = \sqrt{xy \cdot yz \cdot zx} = \sqrt{20 \cdot 24 \cdot 30} = 120.$$

2. Omdat er veel meer factoren 2 dan factoren 5 voorkomen in de ontbinding van het getal 2005!, is het voldoende om het aantal factoren 5 te tellen: elke factor 5 zal dan namelijk aanleiding geven tot een 0 op het einde van het getal. De 401 getallen $5, 10, 15, \ldots, 2005$ bevatten elk een factor 5. De getallen $25, 50, \ldots, 2000$ zijn deelbaar door 25 en hebben dus een extra factor 5: er zijn 80 dergelijke getallen. De veelvouden van 125, namelijk $125, 250, \ldots, 2000$ geven dan nog 16 factoren 5 en tenslotte geven de veelvouden van 625, namelijk $625, 1250, 1875$ nog drie extra factoren 5. Zo vinden we dus in totaal $401 + 80 + 16 + 3 = 500$ nullen.

3. Zijn $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$, $C(c_x, c_y)$, $D(d_x, d_y)$ en $E(e_x, e_y)$ de gegeven punten met hun coördinaten. Merk bijvoorbeeld op dat de cordinaten van het midden van $[AB]$ gegeven worden door $\left(\frac{1}{2}(a_x + b_x), \frac{1}{2}(a_y + b_y)\right)$. Hieruit kan je afleiden dat het voldoende is om te bewijzen dat voor twee van de punten A, B, C, D, E geldt dat zowel de som van de x-coördinaten als de som van de y-coördinaten even is. Welnu, voor elk van de 5 gegeven punten geldt het volgende: ofwel zijn beide coördinaten even, ofwel zijn beide coördinaten oneven, ofwel is de x-coördinaat even en de y-coördinaat even, ofwel is de y-coördinaat oneven en de x-coördinaat even. Voor elk punt hebben we dus 4 “mogelijkheden”, maar er zijn 5 punten gegeven, dus twee van deze punten moeten in dezelfde “categorie” vallen. Het is nu duidelijk dat deze twee punten precies die punten zijn die we zochten, en we zijn klaar.

4. Merk op dat

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{abc}{a} + \frac{abc}{b} + \frac{abc}{c} = ab + bc + ca$$

zodat

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = 0.$$

Bijgevolg is $a = 1$, $b = 1$ of $c = 1$.

5. We bepalen eerst het aantal deelverzamelingen van $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$. Elk van de elementen van S kan wél of niét in een deelverzameling zitten, dus voor elk van de 2005 verzamelingen zijn er 2 mogelijkheden. Het aantal deelverzamelingen is bijgevolg 2^{2005}. Welnu, voor elk van de deelverzamelingen A van S geldt: ofwel heeft A een even aantal elementen, ofwel heeft $S \backslash A$ een even aantal elementen (want het aantal elementen van $S = A \cup (S \backslash A)$ is oneven). Zo kan je inzien dat precies de helft van de deelverzamelingen van S een even aantal elementen moet hebben, en dat aantal is dus $2^{2005}/2 = 2^{2004}$.