Beginnerscompetitie
Oktober 2005
Oplossingen

1. De volkomen kwadraten van twee cijfers zijn 16, 25, 36, 49, 64 en 81. We "starten" nu met een van deze kwadraten en we proberen om een zo groot mogelijk getal N te vormen. Na 16 of 36 moet 64 komen, na 64 komt 49, en dan zitten we vast. Na 25 kan er geen enkel kwadraat komen, na 49 ook niet. Na 64 komt 49, en dan zitten we weer vast. Na 81 komt 16, dan 64, en dan 49: het grootste getal dat we kunnen vinden is dus 81649.

2. Er geldt dat $AP + CP \geq AC$ met gelijkheid als en slechts als P op het lijnstuk AC ligt. (Dit is de driehoeksongelijkheid: de kortste afstand tussen twee punten is een rechte lijn.) Er geldt ook dat $BP + DP \geq BD$ met gelijkheid als en slechts als P op het lijnstuk BD ligt. Door deze ongelijkheden bij elkaar op te tellen vinden we

$$(AP + CP) + (BP + DP) \geq AC + BD \text{ of } AP + BP + CP + DP \geq AC + BD$$

met gelijkheid als en slechts als P op de lijnstukken AC en BD ligt, met andere woorden, als P het snijpunt is van de diagonalen van de vierhoek.

3. Merk op dat $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$. Omdat $p > 3$ is p oneven en niet deelbaar door 3. Van de drie opeenvolgende getallen $p-1, p, p+1$ is er echter precies één deelbaar door 3, en omdat p dat niet is, is dat dus $p-1$ of $p+1$. Dus $(p-1)(p+1)$ is deelbaar door 3. De getallen $p-1$ en $p+1$ zijn twee opeenvolgende even getallen: een van deze getallen is dus een viervoud. Het product $(p-1)(p+1)$ is dus deelbaar door $2 \cdot 4 = 8$. Bijgevolg is $(p-1)(p+1)$ deelbaar door $3 \cdot 8 = 24$, en we zijn klaar.

4. Merk op dat

$$\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy} = \frac{2005xy-2xy}{2005xy+2xy} = \frac{2005-2}{2005+2} = \frac{2003}{2007}.$$

Omdat $x > y$ is dus

$$\frac{x-y}{x+y} = \sqrt{\frac{2003}{2007}}.$$

5. Men kan de elementen van $\{1, 2, \ldots, 16\}$ op een lijn rangschikken zodat de som van elke twee opeenvolgende getallen een volkomen kwadraat is, als volgt:

$$16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.$$

Men kan deze getallen echter niet op een cirkel rangschikken zodat de som van twee opeenvolgende getallen telkens een kwadraat is. Immers, het getal 16 staat tussen twee getallen a en b zodat $16 + a$ en $16 + b$ volkomen kwadraten zijn. Deze kwadraten moeten verschillend zijn, dus het grootste van deze kwadraten is minstens $36 = 6^2$, maar de grootst mogelijke waarde van $16 + a$ is $16 + 15 = 31$. Bijgevolg is het onmogelijk.